פתרון תרגיל 5

שאלה 1

1. נראה הכלה דו כיוונית. יהי $y\in\bigcup p\mathbb{Z}$, אזי y הוא כפולה שלמה של ראשוני ובפרט $y\notin\{1,-1\}$. בכיוון ההפוך: יהי $m\in\mathbb{Z}-\{1,-1\}$ אם m ראשוני אזי $m=m\cdot 1\in m\mathbb{Z}\subseteq\bigcup p\mathbb{Z}$. אם m פריק אזי קיים ראשוני q המחלק את m ולכן $m\in q\mathbb{Z}\subseteq\bigcup p\mathbb{Z}$.

2. נראה ש $\{1,-1\}$ אינה פתוחה ולכן $\mathbb{Z}-\{1,-1\}$ אינה סגורה. אמנם, $\{1,-1\}$ סופית ולכן לא יכולה להכיל סדרה חשבונית דו צדדית שהיא אינסופית.

3. נניח בשלילה כי מס' הראשוניים הוא סופי. הראינו שכל סדרה חשבונית דו צדדית היא סגורה וכמו כן איחוד סופי של קב' סגורות היא סגורה ומכאן $\bigcup p\mathbb{Z}$ סגורה. עפ"י סעיף (1) נקבל ש- $\mathbb{Z}-\{1,-1\}$ סגורה בסתירה לסעיף (2).

שאלה 2

א. תהי $f:(X,\tau_{disc})\to(Y,\tau)$ פונקציה ממרחב טופולוגי דיסקרטי למרחב טופולוגי כלשהו. במ"ט דיסקרטי כל קבוצה היא פתוחה, ולכן $\forall U\subseteq Y$ פתוחה, גם $f^{-1}(U)\subseteq X$ פתוחה. ומהגדרת הרציפות נובע כי f רציפה.

ב. תהי $f:(X,\tau)\to(Y,\tau_{trivial})$. נוכיח שהיא רציפה. כזכור, בטופולוגיה הטריוויאלית יש רק שתי קבוצות פתוחות: הקבוצה הריקה והמרחב עצמו. לכן עלינו לבדוק רק שתי תמונות הפוכות.

$f^{-1}(Y)=X$, $f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$ ואלה הן שתי קבוצות פתוחות במרחב המקורי. לכן (לפי ההגדרה) f רציפה.

ג. $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ רציפה. לכן לכל $U\in\tau_2$ מתקיים $f^{-1}(U)\in\tau_1$. אבל, $\tau_3\subseteq\tau_2$, ולכן לכל $U\in\tau_3$ מתקיים $f^{-1}(U)\in\tau_1$. מהגדרת הרציפות נובע שֶ- $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_3)$ רציפה.

כמו כן, אם $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ רציפה, לכל $U\in\tau_2$ מתקיים $f^{-1}(U)\in\tau_4$, היות ו- $\tau_1\subseteq\tau_4$. לכן $f:(X,\tau_4)\to(Y,\tau_2)$ רציפה גם כן.

<u>שאלה 3</u>

אם X סופי אז הטופולוגיה הקו סופית היא בדיוק הטופולוגיה הדיסקרטית כי כל תת קבוצה סופית ולכן סגורה. (מה שאומר שגם כל תת קבוצה פתוחה). טופולגיה זו קשירה אם ורק אם ב X איבר אחד (אם יש יותר מאיבר אחד אז $X=\{x\}\cup(X-\{x\})$ ולכן X לא קשיר).

נראה שאם X אינסופי המרחב קשיר. אחרת קיימת ב X תת קבוצה סגוחה לא טריוויאלית A.

אם A סגורה ושונה מ X הרי ש A סופית. אם A פתוחה ולא ריקה הרי ש A^c סופית. מכאן $X=A\cup A^c$ סופי וזו סתירה.

מסקנה- X קשיר אם הוא אינסופי או בעל איבר אחד ולא קשיר אם הוא סופי בעל יותר מאיבר אחד.

<u>שאלה 4</u>

א. הפונקציה אינה רציפה ב $x=1$ והיא רציפה בכל שאר הנקודות.

אי רציפות ב $x=1$: עפ"י הגדרת הפונקציה $f(1)=2$. נראה ש **קיימת** סביבה U של $f(1)$ כך **שלכל** סביבה V של 1 מתקיים $f(V)\not\subset U$.

אמנם נקח $U=\{2\}$ שהיא סביבה של $f(1)=2$. עפ"י הגדרת הטופולוגיה הסביבה **היחידה** של 1 היא $V=\mathbb{R}$. מתקיים $f(V)=f(\mathbb{R})=\mathbb{R}\not\subset\{2\}=U$.

רציפות בכל נקודה $x\neq 1$: נשים לב שלכל $x\neq 1$, $f(x)\neq 2$. כמו כן לכל $y\neq 2$ הסביבה היחידה של y היא $U=\mathbb{R}$. לכן הטענה **לכל** U סביבה של $f(x)$ **קיימת** V סביבה של x כך ש $f(V)\subseteq U$ נכונה שכן היא מתקיימת באופן טריוויאלי.

ב. הפרכה. קחו את הטופולוגיה מסעיף א ו $f=g=Id$ אזי פונקצית הזהות רציפה אבל $\left(f+g\right)(x)=2x$ אינה רציפה לפי סעיף א'.

<u>שאלה 5</u>

נוכיח ש שלכל $a<b$ הקבוצה $\left[a,b\right)$ סגוחה ובפרט קיימת סגוחה לא טריוויאלית ולכן המרחב אינו קשיר.

$\left[a,b\right)$ פתוחה מההגדרה של הטופולוגיה.

$\left[a,b\right)$ סגורה- נראה שהמשלים פתוח:

$$\left[a,b\right)^C=\left(-\infty,a\right)\cup\left[b,\infty\right)=\left(\bigcup_{d<a}\left[d,a\right)\right)\cup\left(\bigcup_{b<c}\left[b,c\right)\right)$$

<u>שאלת בונוס</u>

נוכיח רק ש A תת מרחב קשיר. באופן דומה ניתן להוכיח עבור B. כמו כן נוכיח רק את המקרה ששתי הקבוצות פתוחות שכן ההוכחה במידה ושתיהן סגורות דומה מאד.

נניח בשלילה ש A אינו תת מרחב קשיר. אזי קיימות U,V פתוחות ב A זרות ולא ריקות כך ש $U\cup V=A$. מכיון ש A פתוחה ב X נקבל ש U,V פתוחות ב X.

נקבל ש $A\cap B=\left(U\cap B\right)\cup\left(V\cap B\right)$ וזהו פירוק לשתי קבוצות פתוחות ב $A\cap B$ שהינן זרות. כעת, $A\cap B$ קשיר ולכן בה"כ $\begin{matrix}U\cap B=\varnothing\\ V\cap B=A\cap B\end{matrix}$. מתקיים

$A\cup B=\left(U\cup V\right)\cup B=U\cup\left(V\cup B\right)$. $U,\left(V\cup B\right)$ תתי קבוצות פתוחות של $A\cup B$ שאינן ריקות (למה?) . נראה שהן זרות ונקבל סתירה לקשירות של $A\cup B$.

$$U\cap\left(V\cup B\right)=\left(U\cap V\right)\cup\left(U\cap B\right)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing\ .$$