מועד ב 2013

שאלה 1

נניח שקיים $[-d,d]$ המקיים:

א) f חסומה על הקטע

ב) $\frac{d^n}{n!} f^{(n)}(x) \to 0$ במ"ש

צ"ל: $f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ לכל x בקטע

פתרון משפט לגרנז':

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-d,d]} |r_n(x)| \le \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-d,d]} \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(k+1)!} d^{k+1} \right| = 0$$

מתכנס ל-0 במ"ש

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-d,d]} |r_n(x)| = 0$$

$$\Downarrow$$

טור מתכנס במ"ש ל-$f(x)$ ב-$[-d,d]$

שאלה 2

חשב את האינטגרלים הלא מסוימים הבאים:

$$\int x^2 \cos(7x)\,dx = \frac{x^2 \sin(7x)}{7} - \int \frac{2x\sin(7x)}{7}\,dx =$$

אינטגרציה בחלקים
$u = x^2 \qquad u' = 2x\,dx$
$v' = \cos(7x) \qquad v = \frac{\sin(7x)}{7}$

$$= \frac{x^2\sin(7x)}{7} - \frac{2}{7}\left(-\frac{x\cos(7x)}{7} + \frac{1}{7}\int \cos(7x)\,dx\right) =$$

$u = x \qquad u' = 1$
$v' = \sin(7x) \qquad v = -\frac{\cos(7x)}{7}$

$$= \frac{x^2\sin(7x)}{7} + \frac{2}{49}x\cos(7x) - \frac{2}{49}\frac{\sin(7x)}{7} + C$$

ב. (2)

$$\int \frac{dx}{e^x-1} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{1}{t} - \int \frac{1}{t+1} =$$

$t = e^x - 1$

$x = \ln(t+1)$

$dx = \frac{dt}{t+1}$

$$= \ln|t| - \ln|t+1| + C =$$

$$= \ln|e^x-1| - \ln(e^x) + C =$$

$$= \ln|e^x-1| - x + C$$

ד.

$$\int \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx = \frac{1}{4}\int \sin^2(2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(4x)\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x)\right) + C =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x) + C$$

שאלה - 3

א. $\forall x \in \mathbb{R}$: $|\sin(x)| \le x$

לכל אך $x \neq 0$ נוכל לחלק ולקבל

$\cancel{x|\sin(x)|}$ $\frac{\sin(x)}{x} \le 1$

מצד שני, בתחום $(0,\frac{\pi}{2}]$ $\frac{\sin(x)}{x}$

מונוטונית יורדת ולכן מינימום מתקבל ב- $\frac{\pi}{2}$

ולכן $\frac{\sin(x)}{x} \ge \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$

בתחום $[-\frac{\pi}{2},0)$ $\frac{\sin(x)}{x}$ מונוטונית עולה

ולכן מינימום מתקבל ב- $-\frac{\pi}{2}$ ולכן

$$\frac{\sin(x)}{x} \ge \frac{\pi}{2}$$

ה. דוגמת טור פונקציות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

מתכנס במ"ש בכל קטע סגור

<u>הוכחה:</u>

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}|r_n(x)| = $$

$$=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\left(\frac{x}{k}\right)\right| = 0$$

שארית הטור מתכנסת $\forall x\in[a,b]$ לפי דיריכלה.

ולכן הטור שלנו מתכנס במ"ש ב $[a,b]$

ו) ~~טור של פונקציות~~

טור של פונקציות רציפות שמתכנס במ"ש ב-$\mathbb{R}$ ולכן פונקציית הגבול היא פונקציה רציפה ב-$\mathbb{R}$

<u>שאלה 4</u>

א) הוכח: אם טור הפונקציות $\sum|f_n(x)|$ מתכנס במ"ש בקטע סגור, אז גם $\sum f_n(x)$ מתכנס במ"ש באותו קטע.

<u>הוכחה:</u>

$$0\le\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}f_n(x)\right|\le\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}\sum_{k=n+1}^{\infty}|f_n(x)|=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}|r_n(x)|\to 0$$

ולכן הטור שלנו מתכנס במ"ש ב $[a,b]$

ה. נכונה טור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n}$ ב- $[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n} \right| = 0$$

$\Downarrow$

שארית של טור

לכן מתכנס במ"ש $x\in[0,1]$

אבל לא $= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n x}{n} \right|$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x}{n} \right|$ מתבדר

לכל $x\in\mathbb{R}$

ובפרט לכל $x\in[0,1]$