פתרון תרגיל 10 באלגברה לינארית להנדסה

1. פתרון:

(א) יהיו $C, D \in M_2(\mathbb{R})$ ו-$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ אז:

$$T(\lambda C + \mu D) = A(\lambda C + \mu D) = \lambda AC + \mu AD = \lambda T(C) + \mu T(D)$$

לכן T לינארית.

(ב) תהי $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ מטריצה בתחום V, מתקיים:

$$T(M) = AM = \begin{pmatrix} x - z & y - w \\ -4x + 4z & -4y + 4w \end{pmatrix}$$

נבדוק אילו מטריצות בטווח ניתן ליצג בצורה זו. תהי $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ מטריצה בטווח, כדי שיהיה עבורה מקור בתחום, צריך להתקיים

$$\begin{cases} x - z &= a \\ y - w &= b \\ -4x + 4z &= c \\ -4y + 4w &= d \end{cases}$$

לאחר דרוג נקבל את המטריצה הבאה (במשתנים x, y, z, w):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c + 4a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d + 4b \end{array}\right) \tag{1}$$

מדרוג זה אנו רואים שכדי שיהיה פתרון למערכת צריך להתקיים: $\begin{cases} c = -4a \\ d = -4b \end{cases}$

ומכאן ש-$\mathrm{Im}(T)$ הוא:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -4a & -4b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

מצאנו בסיס ל-$\mathrm{Im}(T)$ והוא $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \right\}$. מימד התמונה הוא 2.

$\ker(T)$ הוא קבוצת המטריצות שהקואורדינטות שלהן x, y, z, w מקיימות את המערכת (1) עבור $a = b = c = d = 0$. הפתרון למערכת זו הוא :

$$\begin{cases} x = z \\ y = w \end{cases}$$

מהפתרון נקבל בסיס ל-$\ker(T)$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ ומכאן שמימדו הוא 2.

2. העתקות לינאריות:

(א) העתקה זו לינארית כיון שאפשר לרשום אותה בצורה:

$$T(x,y)=(x,y)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}=(x,-y,0)$$

(ב) העתקה זו לינארית כיון שאפשר לרשום אותה בצורה:

$$T(x,y,z)=(x,y,z)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}=(x+y,x-2z)$$

(ג) נשים לב כי לפי כלל ידוע בחשבון דיפרנציאלי: $(xp(x))'=p(x)+xp'(x)$. נראה שהעתקה זו לינארית: יהיו $p,q\in\mathbb{R}_n[x]$ ויהיו $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ סקלרים. מתקיים:

$$\begin{aligned}&T(\lambda p+\mu q)=(x(\lambda p(x)+\mu q(x)))'=\\&(\lambda p(x)+\mu q(x))+x(\lambda p(x)+\mu q(x))'=\\&(\lambda p(x)+\mu q(x))+x(\lambda p'(x)+\mu q'(x))=\\&\lambda(p(x)+xp'(x))+\mu(q(x)+xq'(x))=\lambda T(p)+\mu T(q)\end{aligned}$$

לכן T לינארית.

(ד) ההעתקה אינה לינארית. נראה למשל שהיא אינה שומרת על הכפל בסקלר, נשים לב ש- $T(\frac{\pi}{2},0,0)=(\sin(\frac{\pi}{2}),0)=(1,0)$, אבל

$$T(2(\frac{\pi}{2},0,0))=T(\pi,0,0)=(\sin(\pi),0)=(0,0)\neq 2(1,0)=(2,0)$$

(ה) ההעתקה לינארית. יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ ו-$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ אז:

$$\begin{aligned}&T(\lambda A+\mu B)=(\lambda A+\mu B)-(\lambda A+\mu B)^t=(\lambda A+\mu B)-(\lambda A^t+\mu B^t)\\&(\lambda(A-A^t)+\mu(B-B^t)=\lambda T(A)+\mu T(B)\end{aligned}$$

3. פתרון:

(א) קבוצת הוקטורים הנתונה $\{(0,0,1),(1,1,1),(0,1,-2)\}$ היא בת"ל (בדקו) ולכן מהווה בסיס ל-$\mathbb{R}^3$, ע"פ המשפט מהשעור, נקבל שקיימת העתקה לינארית יחידה העונה על דרישות השאלה.

כדי למצוא את ההעתקה T המבוקשת, נרשום וקטור כללי ב-$\mathbb{R}^3$ לפי הבסיס הנתון, חישוב קל מוביל להצגה הבאה:

$$(x,y,z)=x(1,1,1)+(y-x)(0,1,-2)+(z-3x+2y)(0,0,1)$$

ומכאן נקבל מיד את ההעתקה T:

$$\begin{aligned}&T(x,y,z)=xT(1,1,1)+(y-x)T(0,1,-2)+(z-3x+2y)T(0,0,1)=\\&x\cdot 3+(y-x)\cdot 1+(z-3x+2y)\cdot(-2)=8x-3y-2z\end{aligned}$$

העתקה זו היא על. נבחר $a \in \mathbb{R}$ איבר בטווח, קיים לו מקור בתחום, למשל $(\frac{a}{8}, 0, 0)$.

העתקה זו אינה חח"ע, כי למשל $T(1,0,0) = 8$ וגם $T(0,0,-4) = 8$.

נובע שההעתקה אינה איזומורפיזם.

הערה: מכך שההעתקה על ניתן להסיק שהיא אינה חח"ע ע"פ משפט המימדים.

(ב) הקבוצה הנתונה $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ מכילה תלות לינארית $(1,1) = (1,0) + (0,1)$, ולכן לא מובטח כי קיימת ט"ל העונה על דרישות השאלה.

נבדוק האם התלות הקיימת בין וקטורי המקור קיימת גם בין תמונותיהם:

$$T(1,0) + T(0,1) = (3,1) + (1,2) = (4,3) \neq (3,4) = T(1,1)$$

התלות אינה מתקיימת בין וקטורי התמונה, ולכן לא קיימת העתקה לינארית העונה על הדרישות.

(ג) כיון ש-$\{(1,0,1),(2,-1,1)\}$ בת"ל, נוכל להגדיר את T כך ש-

$$T(1,0,1) = 0 \qquad \text{וגם} \qquad T(2,-1,1) = 0$$

כדי להשלים את הגדרת T נשלים את זוג הוקטורים לבסיס של $\mathbb{R}^3$, למשל, ניתן לוודא שהוקטור $(1,0,0)$ בת"ל בשני הוקטורים הנתונים.

כעת, נותר רק להגדיר את T על $(1,0,0)$ כך שההגדרה לא תגדיל את $\ker(T)$, למשל נגדיר

$$T(1,0,0) = x$$

T ודאי אינה חח"ע, כי $\ker(T) \neq \{\vec{0}\}$ לפי דרישת השאלה, מאותה דרישה נקבל גם ש-$\dim(\ker(T)) = 2$.

ממשפט המימדים, נקבל כעת ש-T אינה על כי $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T))$ ולכן $\dim(\text{Im}(T)) = 1$ (ומימד מרחב הטווח הוא 2).

נובע ש-T אינה איזומורפיזם.

כדי למצוא הצגה מפורשת ל-T, נציג כל וקטור (a,b,c) ב-$\mathbb{R}^3$ בבסיס שבחרנו. נקבל ש-

$$(a,b,c) = (b+c)(1,0,1) + (-b)(2,-1,1) + (a+b-c)(1,0,0)$$

ומכאן ע"י הפעלת T על שיוויון זה נקבל:

$$T(a,b,c) = (b+c)(0) + (-b)(0) + (a+b-c)(x) = (a+b-c)x$$

הערה: הטרנספורמציה T שמצאנו אינה היחידה המקיימת את דרישת השאלה.

(ד) לפי משפט המימדים לא קיימת טרנספורמציה כזו. נניח בשלילה ש-T מקיימת את דרישות השאלה, אז:

$$4 = \dim(M_2(\mathbb{R})) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = 1 + \dim(im(T))$$

וקיבלנו ש-$\dim(\text{Im}(T)) = 3$. אבל T היא טרנספורמציה ל-$\mathbb{R}^2$ ו-$\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, לכן $\dim(\text{Im}(T)) \leq 2$ וקיבלנו סתירה.

לכן לא קיימת טרנספורמציה העונה על הדרישות.

(ה) המימד של מרחב התחום הוא 4, אבל לפי הנתון, המימד של תמונתו הוא 5. דבר זה אינו אפשרי לפי משפט המימדים הדורש כי:

$$4 = \dim(M_2(\mathbb{R})) = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(ker(T)) + 5$$

לכן לא קיימת העתקה העונה על הדרישות.

(ו) המימד של מרחב התחום הוא 3, נבחר עבורו בסיס, למשל: $B = \{x^2, x, 1\}$. מהנתון אנו רואים שתמונת ההעתקה צריכה להפרש ע"י שני וקטורים.
העתקה לינארית נקבעת ע"פ תמונותיה על בסיס (והטווח שלה הוא ה-span של תמונות אלה), כדי לקבל העתקה העונה על הדרוש נגדיר:

$$T(x^2) = (1,2,0,-4) \qquad T(x) = (4,0,1,-1)$$

ובכך כבר הבטחנו ש-$im(T) \supseteq \mathrm{Sp}\{(1,2,0,-4),(4,0,1,-1)\}$. את וקטור הבסיס השלישי נוכל להגדיר כרצוננו ובלבד שתמונתו תהיה ב$im(T)$ הנתון לנו. נגדיר למשל: $T(1) = (0,0,0,0)$.
נרשום כעת ביטוי מפורש להעתקה:

$$T(ax^2+bx+c) = a(1,2,0,-4)+b(4,0,1,-1) = (a+4b, 2a, b, -4a-b)$$

העתקה זו מקיימת את דרישות השאלה (היא אינה היחידה המקיימת דרישות אלה).
ההעתקה שהגדרנו אינה חח"ע, כיון ש-$\ker(T)$ אינו מכיל את וקטור האפס בלבד (למשל כי הגדרנו את $T(1) = \vec{0}$).
ההעתקה גם אינה על משיקולי מימדים. מימד מרחב התחום הוא 3 ומימד מרחב הטווח 4, לכן לפי משפט המימדים ההעתקה אינה יכולה להיות על. נובע שההעתקה אינה איזומורפיזם.

(ז) כיון ש-$\{(0,1,1,0),(1,1,0,0)\}$ בת"ל, נוכל להגדיר:

$$T(1,1,0,0) = T(0,1,1,0) = \vec{0}$$

נשלים שני וקטורים אלה לבסיס של $\mathbb{R}^4$, למשל ע"י הוספת $(0,0,1,0)$ ו-$(0,0,0,1)$.
כעת נגדיר:

$$T(0,0,1,0) = (1,1,0,0,0) \qquad T(0,0,0,1) = (0,1,1,0,0)$$

כיון ש-$\{(1,1,0,0,0),(0,1,1,0,0)\}$ בת"ל, הגדרה זו לא גרמה להגדלת $\ker(T)$ מעבר לדרוש בשאלה, ולכן T שהגדרנו עונה על דרישות השאלה.
T אינה חח"ע, כיון שמדרישות השאלה $\ker(T) \neq \{\vec{0}\}$.
T גם אינה על, כיון ש-$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Sp}\{(1,1,0,0,0),(0,1,1,0,0)\}$.
נובע ש-T אינה איזומורפיזם.
נמצא הצגה מפורשת ל-T. נצג כל וקטור ב-$\mathbb{R}^4$ ע"י הבסיס שבחרנו:

$$(a,b,c,d) = a(1,1,0,0)+(-a+b)(0,1,1,0)+(a-b+c)(0,0,1,0)+d(0,0,0,1)$$

נפעיל את T ונקבל:

$$T(a,b,c,d) = a\vec{0} + (-a+b)\vec{0} + (a-b+c)(1,1,0,0,0) + d(0,1,1,0,0) = (a-b+c, a-b+c+d, d, 0, 0)$$

הערה: גם T זו אינה היחידה העונה על דרישות השאלה.

(ח) לא קיימת T כזו. נניח בשלילה ש-T מקיימת את דרישות השאלה, אז:

$$4 = \dim(M_2(\mathbb{R})) = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = 3 + 2 = 5$$

וזו סתירה. לכן טרנספורמציה לינארית T המקיימת את דרישות השאלה אינה קיימת.

4. פתרון:

(א) יהיו $v, w \in V$ ו-$\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ אז מהלינאריות של T נקבל:

$$S(\lambda v + \mu w) = T(T(\lambda v + \mu w)) = T(\lambda T(v) + \mu T(w)) = \lambda T(T(v)) + \mu T(T(w)) = \lambda S(v) + \mu S(w)$$

(ב) יהי $v \in \ker(T)$, אז $T(v) = 0$. לכן

$$T^2(v) = T(T(v)) = T(0) = 0$$

ולכן $v \in \ker(T^2)$.

(ג) יהי $w \in \mathrm{Im}(T^2)$, אז קיים $v \in V$ כך ש- $T^2(v) = w$. נסמן $u = T(v)$, אז

$$T(u) = T(T(v)) = T^2(v) = w$$

ולכן $w \in \mathrm{Im}(T)$.