תרגיל 5 אלגברה לינארית למורים תש"ף פתרון בלבד

9 ביוני 2020

1. עיקר כוונת השאלה לעבור על האקסיומות של מ"ו ולהשתכנע/לוודא/להתרשם שהם אכן מתקיימות ב $\mathbb{R}^2$ עם הפעולות הטבעיות.
2. עיקר כוונת השאלה לעבור על האקסיומות של מ"ו ולהשתכנע/לוודא/להתרשם שהם אכן מתקיימות ב $\mathbb{R}^{2\times 2}$ עם הפעולות הטבעיות.
3. עיקר כוונת השאלה לעבור על האקסיומות של מ"ו ולראות דוגמה טיפה פחות סטנדרטית..
4. נתון ש $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות ריבועיות המקיימות $A^3=I$ ו $BA=A\left(A+I\right)$ ולכן

(א) $A^2=A^{-1}$ מכיוון שהשיוויון $A^3=I$ ניתן לרשום כ $A\cdot A^2=I$ וגם כ $A^2\cdot A=I$ ואז לפי הגדרה $A^2=A^{-1}$.

(ב) נכפול את השיוויון $BA=A\left(A+I\right)$ ב A^{-1} מימין ונקבל

$$B=A\left(A+I\right)\cdot A^{-1}$$

ומכיוון ש $A^2=A^{-1}$ נוכל להמשיך, בשימוש תכונת הפילוג

$$\begin{aligned}B&=A\left(A+I\right)\cdot A^{-1}\\&=\left(A^2+A\right)A^{-1}\\&=A+I\end{aligned}$$

כנדרש.

(ג) מסעיפים קודמים נוכל לחשב כי

$$BA=\left(A+I\right)A=AA+A=A\left(A+I\right)=AB$$

ולכן

$$BABA=ABBA=ABAB=AABB=A^2B^2$$

כנדרש.

5. נתון כי A מטריצה הפיכה.

(א) נוכיח כי ל A הופכית יחידה: נניח B,C הופכיות של A אזי $BA=I, AC=I$ ואז לפי קיבצויות מתקיים כי $(BA)C=B(AC)$. אגף שמאל שווה ל$IC=C$ ואגף ימין שווה ל $BI=B$ ולכן $B=C$מה שאומר שההופכית יחידה.

(ב) לא רלוונטי למי שלא למד שיחלוף.

(ג) נוכיח כי A^5 הפיכה: $A^5=AAAAA$ ולכן

$$AAAAA\cdot A^{-1}A^{-1}A^{-1}A^{-1}A^{-1}=I$$

וקיבלנו שהמכפלה בין A^5 ל $A^{-1}A^{-1}A^{-1}A^{-1}A^{-1}$ שווה I ולכן אחת ההופכית של השניה (זכרו את המשפט כי מספיק לבדוק שכפל מצד אחד שווה ל I ולא צריך את שני הצדדים כאשר המטריצות ריבועיות).