תרגיל מספר 5 מבנים אלגבריים

להגשה עד 4.12.2014

1. הוכח/הפרך כי H היא ת"ח של G במקרים הבאים

(א) $H=\{a+ai \mid a\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{C}=G$

פתרון : ת"ח כי $a+ai,b+bi\in H$ אזי $(a+ai)-(b+bi)=a-b+(a-b)i\in H$

(ב) $H=m\mathbb{Z}_n=\{mz \mid z\in\mathbb{Z}_n\}\subseteq\mathbb{Z}_n=G$

פתרון : ת"ח כי $mz_1,mz_2\in H$ אזי $mz_1-mz_2=m(z_1-z_2)\in H$

(ג) $H=\{A\in\mathbb{F}^{n\times n} \mid |A|\neq 0\}\subseteq\mathbb{F}^{n\times n}=G$

פתרון : לא ת"ח כי $I,-I\in H$ אבל $I-I=0\notin H$

(ד) תהא G חבורה ו $n\in\mathbb{N}$. $H=\{g^n| \, g\in G\}$

פתרון : לא. למשל $G=S_3$. ו $n=3$ אזי $H=\{id,(1,2),(2,3),(13)\}$ אינה ת"ח כי אין סגירות.

(ה) תהא G חבורה חילופית ו $n\in\mathbb{Z}$. $H=\{g^n| \, g\in G\}$

פתרון : ת"ח כי $g_1^n,g_2^n\in H$ אזי $g_1^n\left(g_2^n\right)^{-1}=g_1^n\left(g_2^{-1}\right)^n=\left(g_1g_2^{-1}\right)^n\in H$ כאשר המעבר האחרון נכון בגלל ש H חילופית. בנוסף $e^n=e\in H$

2. תהא G עם $n>2$ איברים. הוכח כי לא קיימת $H\leq G$ עם $n-1$ איברים.

פתרון : נניח בשלילה כי קיימת $G\leq H$ עם $n-1$ איברים. אזי קיים איבר יחיד $g\in G\backslash H$.

כיוון שב H יש לפחות 2 איברים אזי קיים $e\neq h\in H$. בנוסף $gh\in H$ כי $gh\neq g$. אבל Hת"ח ולכן קיים $h^{-1}\in H$ וגם מתקיים סגירות $g=(gh)\,h^{-1}\in H$. סתירה

3. תהא G חבורה $H_1,H_2\leq G$ הוכח כי

$$[H_1\subseteq H_2\vee H_2\subseteq H_1]\iff[H_1\cup H_2\leq G]$$

פתרון : הכיוון $(\Rightarrow)$ טריוואלי. נוכיח את הכיוון $(\Leftarrow)$: נניח בשלילה כי $[H_1\cup H_2\leq G]$ אבל $H_1\nsubseteq H_2\wedge H_2\nsubseteq H_1$

אזי קיימים $h_1\in H_1\backslash H_2$, $h_2\in H_2\backslash H_1$. כיוון ש $h_1,h_2\in H_1\cup H_2$ אזי גם $h_1+h_2\in H_1\cup H_2$ כי מניחים כי זוהי ת"ח.

כעת מהגדרת איחוד נובע כי $h_1+h_2\in H_1$ או $h_1+h_2\in H_2$. בה"כ $h_1+h_2\in H_1$. כיוון ש $h_1\in H_1$ אזי גם $-h_1\in H_1$ ואז$h_2=(h_1+h_2)+(-h_1)\in H_1$ כי H_1 חבורה . סתירה לכך ש $h_2\notin H_1$.

הבהרות לסימונים:

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים
2. $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ היא קבוצת המספרים השלמים
3. $\mathbb{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים
4. $\mathbb{C} = \left\{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R},\, i^2 = -1\right\}$ היא קבוצת המספרים המרוכבים. בהקשר שלנו זוהי חבורה חיבורית (הפעולה היא חיבור מספרים).
5. $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots n-1\}$ היא הקבוצה של כל השאריות האפשריות בחלוקה ב n. בהקשר שלנו זוהי חבורה חיבורית (הפעולה היא חיבור מודולו n).
6. $\mathbb{F}^{n \times n}$ היא קבוצת כל המטריצות הריבועית $n \times n$ עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$. בהקשר שלנו זוהי חבורה חיבורית (הפעולה היא חיבור חיבור מטריצות). להגדרת שדה אפשר להסתכל בוויקיפדיה.
7. עבור $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ נהוג לסמן $|A|$ כדטרמיננטה של A. להגדרת דטרמיננטה אפשר להתסכל בוויקיפדיה.
8. S_3 היא חבורת התמורות מהקבוצה $\{1, 2, 3\}$ לעצמה.
9. עבור חבורה G. הפירוש של הסימון $H \leq G$ הוא ש H היא תת חבורה של G.
10. הסימון $H_1 \subseteq H_2$ פירוש שהקבוצה H_1מוכלת בקבוצה H_2. כלומר שאם איבר ששיך ל H_1 אז בהכרח הוא שייך ל H_2.
11. הסימון $\iff$ היא קשר לוגי של "אם ורק אם" כלומר שאם צד ימין מתקיים אז צד שמאל מתקיים. בנוסף, אם צד שמאל מתקיים אז צד ימין מתקיים.
12. $G \backslash H = \{x \in G \mid x \notin H\}$ פירושו ההפרש בין G ל H.
13. $H_1 \cup H_2 = \{x \mid x \in H_1 \vee x \in H_2\}$ פירושו האיחוד בין הקבוצה H_1 לקבוצה H_2.
14. הסימון $\vee$ הוא הקשר הלוגי "או"