פתרון תרגיל בית 3 - טופולוגיה

**שאלה 1**

יהי  מ"מ**.**

1. הוכיחו כי לכל**,** תת קבוצה סגורה של **.**
2. הסיקו כי כל תת קבוצה סופית של **** סגורה.

**פתרון**

1. נוכיח שלכל  ,  היא קבוצה סגורה בשתי דרכים:

דרך סדרות- קבוצה סגורה במ"מ אם ורק אם היא מכילה את כל נקודות הגבול שלה. ברור שהסדרה היחידה שמוכלת ב- היא הסדרה הקבועה שגבולה הוא, כמובן, .

דרך נוספת - נראה ש- פתוחה. תהי . יהי . ברור ש- כי . נראה שמתקיים . אם  אזי   
. לכן,  (כי ). מכאן  וקיבלנו הדרוש.

1. נניח ש- תת קבוצה סופית של . אם ברור ש-  סגורה. אחרת, תהי (). מתקיים . עפ"י סעיף א' לכל  סגורה. מכיון שאיחוד סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה נקבל ש- סגורה.

**שאלה 2**

1. הוכיחו ש- אינה סגורה ואינה פתוחה ב-.
2. הוכיחו שהקבוצה  סגורה ב-.
3. הוכיחו: כל מישור ב-  הוא סגור.
4. יהי המרחב המטרי של המטריצות הריבועיות  עם מקדמים ממשיים (זהו המרחב המטרי  עם המטריקה האוקלידית). הוכיחו שקבוצת המטריצות ההפיכות פתוחה במרחב זה.

**פתרון**

1. אינה פתוחה: כי כל כדור פתוח עם מרכז רציונאלי, מכיל גם נקודות אי רציונאליות.

אינה סגורה: קיימת סדרה בעלת איברים רציונאליים המתכנסת לאיבר שאינו רציונאלי (למשל: הפיתוח העשרוני של ).

1. הפונקציה  המוגדרת על-ידי  היא רציפה (מדוע?). בנוסף  ולכן  סגורה.
2. כל מישור הוא מהצורה . נתבונן בפונקציה  המוגדרת ע"י  . מתקיים  מכיוון ש סגור ב-  ו- רציפה הרי ש-  (שהוא המישור) סגור ב-.
3. פונקצית הדטרמיננטה  רציפה כפולינום ומתקיים  מכיוון ש פתוחה ב- נקבל הדרוש.

**שאלה 3**

1. הוכיחו/הפריכו: מטריקות שקולות מגדירות את אותה משפחה של קבוצות סגורות.
2. אילו מהמטריקות הבאות שקולות מעל  :  (המטריקה הדיסקרטית) ,  (המטריקה ה-7 אדית),  (המטריקה ה-5 אדית) והמטריקה הסטנדרטית  המוגדרת ע"י  (הוכיחו את תשובתכם!).
3. נגדיר שתי מטריקות על . עבור , . הוכיחו או הפריכו: שתי המטריקות הן שקולות.
4. תהי . נגדיר על קבוצה זו שתי מטריקות: , . הוכיחו או הפריכו: שתי המטריקות הן שקולת.

**פתרון**

1. הוכחה: מטריקות שקולות מגדירות את אותה משפחה של קבוצות פתוחות ולכן אם נעבור למשלים, ניתן לראות שהן מגדירות אותה משפחה של קבוצות סגורות.
2. מתקיים  אבל  שכן . מכאן ש ו-  אינן שקולות.

במטריקה הדיסקרטית הסדרות היחידות שמתכנסות הן הקבועות לבסוף. במטריקות  אין זה המצב, לכן שתי מטריקות אלה אינן שקולות לדסקרטית.

נוכיח שהמטריקה הסטנדרטית שקולה לדיסקרטית מעל  (ולכן אינה שקולה ל-). מ"ל שכל סדרה המתכנסת במ"מ  קבועה לבסוף. נניח ש אזי ניקח  ומתקיים שקיים  כך שלכל   . מכאן בהכרח (המרחק המינימלי בין נקודות שונות של  הוא 1), לכל   והוכחנו הדרוש.

1. שתי המטריקות אינן שקולות. הסדרה  מתכנסת ל- לפי , אך לא מתכנסת ל- לפי .
2. שתי המטריקות אינן שקולות. נמצא סדרה שמתכנסת לאפס באחת מהן, ואינה מתכנסת בשניה.

נתבונן בסדרה הבאה:



נסמן . מתקיים:

 וגם ; וזה מוכיח הדרוש.

**שאלה** **4**

1. יהיו  מטריקות שקולות מעל . יהיו מטריקות שקולות מעל . נניח ש-  רציפה. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה רציפה.
2. יהיו  מטריקות כלשהן מעל . יהיו מטריקות כלשהן מעל . נניח ש-  רציפה. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה רציפה.

**פתרון**

1. תהי  פתוחה ב-. מכיון ש- מטריקות שקולות מעל  נקבל  פתוחה ב-. הפונקציה  רציפה וכן  פתוחה ב-  ולכן  פתוחה ב-.  מטריקות שקולות מעל  ולכן  פתוחה גם ב-. קיבלנו שלכל  פתוחה ב-   פתוחה ב- ומכאן רציפה.
2. הפרכה ע"י דוגמה נגדית: ניקח ,  מטריקה דיסקרטית ,  מטריקה סטנדרטית ב- (מטריקה המושרית מערך מוחלט). נקבל שכל פונקציה  היא רציפה מכיון שכל תת קבוצה ב- היא פתוחה (מדוע?) אבל ניתן למצוא  כך ש-  אינה רציפה, למשל, .

**שאלה 5**

תהי  פונקציה בין שני מרחבים מטריים.

1. הוכיחו:  רציפה אמ"מ  פתוחה ב- לכל כדור פתוח .
2. הראו שהטענה האנלוגית עבור כדורים סגורים אינה נכונה. כלומר, מצאו שני מרחבים מטריים ופונקציה בינהם , כך ש- אינה רציפה למרות שכן מתקיים התנאי הבא:  סגורה ב- לכל כדור סגור .

**פתרון**

1.  אם  רציפה אז  פתוחה ב- לכל פתוחה . מכיון שכל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה נקבל ש- פתוחה ב- לכל כדור פתוח .

 על מנת להוכיח ש- רציפה נראה ש- פתוחה ב- לכל פתוחה . תהי  פתוחה ב-. אזי לכל  קיים כדור פתוח . מכאן . מתקיים .

מכיון ש פתוחה לכל  עפ"י הנתון וכן איחוד של פתוחות הוא קבוצה פתוחה נקבל ש- פתוחה ב- כדרוש.

1. יהי  ,  המטריקה הסטנדרטית ו- המטריקה הדיסקרטית.

תהי  פונקציית הזהות. הפונקציה אינה רציפה שכן  למשל פתוחה ב  (כל הקבוצות פתוחות במ"מ דיסקרטי) אבל  לא פתוחה ב. מצד שני במטריקה הדיסקרטית כל כדור סגור עם רדיוס  הוא המרחב כולו וכדור סגור עם רדיוס  הוא נקודון (בדקו!) . מכיון ש- סגורה ב  וכן לכל  מתקיים  סגורה ב (ראו שאלה 1 א') נקבל הדרוש.

**שאלה 6**

נתבונן במרחב : מרחב כל הפונקציות הרציפות  עם מטריקת המקסימום.

1. תהי . נגדיר פונקציה  על-ידי . הוכיחו כי זו פונקציה רציפה.
2. הוכיחו/הפריכו: הקבוצה  היא קבוצה פתוחה ב-.

**פתרון**

1. נניח שסדרת הפונקציות  מקיימת  עבור  ונראה ש-  ומכאן נסיק ש-  רציפה. על מנת להוכיח ש- שקול להוכיח . נשים לב שמתקיים . מהתכנסות  וממשפט הסנדביץ' נקבל מיידית ש- כדרוש.
2. מתקיים . מרציפות  (עפ"י סעיף א') ומהעובדה ש- פתוחה ב- נקבל ש-  פתוחה ב-.