נכתב על ידי יהונתן רגב

אינטגרלים לא אמיתיים

מבחן דיריכלה (גרסה נוספת)

יהיו:

א. $f(x)$ רציפה ב - $[a,\infty)$, כך שקיים $c\in\mathbb{R}$ עבור לכל $a<b$:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|<c$$

ב. $0 \xrightarrow{x\to\infty} g(x)$ מונוטונית וגזירה ברציפות ב - $[a,\infty)$.

אזי, האינטגרל:

$$\int_a^\infty f(x)\cdot g(x)\,dx$$

מתכנס (במובן הצר).

משפט

ההוכחה דומה להוכחה הקודמת, ניתן תקציר.

עפ"י אינטגרציה בחלקים:

$$\int_a^b \overbrace{g(x)}^{:=u}\cdot\overbrace{f(x)\,dx}^{:=dv}=\underbrace{\left[\underbrace{u}_{=g(x)\xrightarrow{b\to\infty}0}\cdot\underbrace{v}_{\text{חסום}}\right]_a^b}_{\xrightarrow{b\to\infty}-u(a)\cdot v(a)}-\int_a^b v\cdot\overbrace{g'(x)\,dx}^{=du}$$

עבור $g(x)\searrow 0$, כלומר $g'(x)\le 0$:

$$\int_a^b |v\cdot g'(x)|\,dx\overset{|v|\le c}{\le} c\cdot\int_a^b |g'(x)|\,dx$$

$$\int_a^b |v\cdot g'(x)|\,dx\le c\cdot\int_a^b -g'(x)\,dx$$

$$\int_a^b |v\cdot g'(x)|\,dx \le -c\cdot\left(\overbrace{g(b)}^{\xrightarrow{b\to\infty}0} - g(a)\right) \xrightarrow{b\to\infty} c\cdot g(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^\infty |v\cdot g'(x)|\,dx \le c\cdot g(a) < \infty$$

לכן, האינטגרל:

$$\int_a^\infty v\cdot g'(x)\,dx$$

מתכנס (בהחלט), לכן האינטגרל:

$$\int_a^\infty f(x)\cdot g(x)\,dx$$

קיים.

$$\blacksquare$$

תזכורת

התכנסות אינטגרל:

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

תלויה רק בזנב.

לכן, מספיק לבדוק את התכנסות האינטגרל:

$$\int_k^\infty f(x)dx \quad ; \quad k\in\mathbb{N}$$

משפט (מבחן האינטגרל)

יהי $k\in\mathbb{N}$.

נכתב על ידי יהונתן רגב

תהי $f(x)$ חיובית, יורדת ואינטגרבילית בכל קטע $[k,b]$ עבור $k<b$.

אזי:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} f(n) \le \int_k^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=k}^{\infty} f(n)$$

בפרט, האינטגרל:

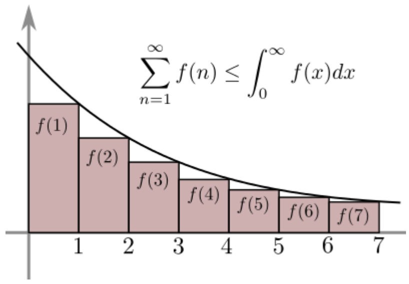
$$\int_k^{\infty} f(x)\,dx$$

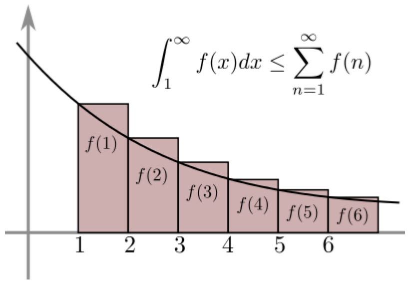
והטור:

$$\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$$

מתכנסים ומתבדרים יחד.

המחשה





הוכחה

נוכיח:

$$\int_k^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=k}^{\infty} f(n)$$

יהי $k<b$.

$0 \le f(x)$, לכן:

$$\int_k^{b} f(x)\,dx \overset{M:=[b]+1}{\le} \int_k^{M} f(x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int_k^b f(x)\,dx \le \int_k^{k+1} f(x)\,dx + \int_{k+1}^{k+2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{m-1}^{m} f(x)\,dx$$

$f(x)$ יורדת, לכן:

$$\int_k^b f(x)\,dx \le \int_k^{k+1} f(k)\,dx + \int_{k+1}^{k+2} f(k+1)\,dx + \cdots + \int_{m-1}^{m} f(m-1)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\int_k^b f(x)\,dx \le f(k) + f(k+1) + \cdots + f(m-1)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_k^b f(x)\,dx \le \sum_{n=k}^{m-1} f(n)$$

$0 \le f(x)$, לכן:

$$\int_k^b f(x)\,dx \le \sum_{n=k}^{\infty} f(n)$$

לכן, לכל $k < b$:

$$\int_k^\infty f(x)\,dx \xleftarrow{b\to\infty} \int_k^b f(x)\,dx \le \sum_{n=k}^{\infty} f(n)$$

לכן:

$$\int_k^\infty f(x)\,dx \le \sum_{n=k}^{\infty} f(n)$$

$\square$

נוכיח:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} f(n) \leq \int_{k}^{\infty} f(x)\,dx$$

יהי $k < m \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=k+1}^{m} f(n) = f(k+1) + f(k+2) + \cdots + f(m)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=k+1}^{m} f(n) \leq \int_{k}^{k+1} f(x)\,dx + \int_{k+1}^{k+2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{m-1}^{m} f(x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=k+1}^{m} f(n) \leq \int_{k}^{m} f(x)\,dx \xrightarrow{m\to\infty} \int_{k}^{\infty} f(x)\,dx$$

(למעשה, משתמשים באפיון גבול לפי לשון הסדרות).

לכן, לכל $k < m$:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} f(n) \xleftarrow{\infty\leftarrow m} \sum_{n=k+1}^{m} f(n) \leq \int_{k}^{\infty} f(x)\,dx$$

לכן:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} f(n) \leq \int_{k}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\square$$

לכן:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} f(n) \leq \int_{k}^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=k}^{\infty} f(n)$$

$$\blacksquare$$

דוגמה

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

מתקיים:

$$1+\frac{1}{4}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}\le 1+\frac{1}{4}+\int_2^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$$

מתקיים:

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_2^{\infty}=\frac{1}{2}$$

$$1.25\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\le 1.75$$

■

עובדה

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\approx 1.644$$

דוגמה

מקבלים, ללא צורך בהוכחות ייחודיות ומבחן העיבוי:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}<\infty\Leftrightarrow 1<\alpha$$

שכן:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}<\infty\overset{\text{מבחן האינטגרל}}{\Leftrightarrow}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx<\infty$$

והרי:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx < \infty \iff 1 < \alpha$$

■

הערה

לא כל המשפטים על טורים חיוביים עוברים כלשונם לאינטגרלים.

אם:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

אז:

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

<u>שאלה</u>

נניח ש: $f(x)$ $0 \leq$ ו:

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\,dx < \infty$$

האם בהכרח:

$$f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

<u>תשובה</u>

לא!

פונקציה של משולשים:

<u>רעיון</u> (לא פורמלי)

נגדיר פונקציה $f(x)$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

א. $f(n) = 1$.
ב. $S_{\Delta_n} = \frac{1}{n^2}$.

ואז:

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$$

ניתן גם ש - f תהיה גזירה, זאת ע"י "עיגול" הקודקודים העליונים של המשלושים.

■

אינטגרלים לא אמיתיים מסוג שני

תזכורת

אם $f(x)$ אינטגרבילית ב - $[a,b]$, אז הפונקציה:

$$F(t) := \int_a^t f(x)\,dx$$

רציפה.

בפרט:

$$F(t) \xrightarrow{t\to b^-} F(b)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^t f(x)\,dx \xrightarrow{t\to b^-} \int_a^b f(x)\,dx$$

מסקנה

אם $f(x)$ אינטגרבילית ב - $[a,b]$, אז הפונקציה:

$$G(t) := \int_t^b f(x)\,dx$$

רציפה.

בפרט:

$$G(t) \xrightarrow{t\to a^+} G(b)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_t^b f(x)\,dx \xrightarrow{t\to a^+} \int_a^b f(x)\,dx$$

הוכחה

$$G(t) := \int_t^b f(x)\,dx = \overbrace{\int_a^b f(x)\,dx}^{\text{קבוע}} - \overbrace{\int_a^t f(x)\,dx}^{\text{רציפה}}$$

ועפ"י משפט $G(t)$ רציפה.

■

הגדרה

a היא **נקודת סינגולריות** של פונקציה f, אם בכל סביבה מנוקבת של הנקודה a, הפונקציה f אינה חסומה.

דוגמה

0 היא נקודת הסינגולריות היחידה של הפונקציה $\frac{1}{x}$ בקטע $[0,1]$.

הגדרה (אינטגרל לא אמיתי מסוג שני)

א. אם f אינטגרבילית בכל תת קטע של $(a,b]$ ו a – נקודת סינגולריות (יחידה) של f, נגדיר:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx}$$

ב. אם f אינטגרבילית בכל תת של $[a,b)$ ו b – נקודת סינגולריות (יחידה) של f, נגדיר:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx}$$

ג. אם f אינטגרבילית בכת תת קטע של (a,b) ו - a,b נקודות סינגולריות של f, נבחר $c\in(a,b)$ ונגדיר:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

(ההגדרה אינה תלויה בבחירת הנקודה c - **תרגיל**).

ד. אם $s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ הן כל נקודות הסינגולריות של f ב - $[a,b]$ ו f – אינטגרבילית בכל תת קטע של $[a,b]$ שאינו מכיל נקודות סינגולריות, נגדיר:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^{s_1} f(x)\,dx + \int_{s_1}^{s_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{s_{k-1}}^{s_k} f(x)\,dx + \int_{s_k}^{b} f(x)\,dx}$$

כאשר לכל $c \in [a,b]$:

$$\int_c^c f(x)\,dx := 0$$

דוגמה

הפונקציה:

$$f(x) := \frac{1}{x^\alpha}$$

$\alpha \le 0$: $f(x)$ רציפה, לכן אינטגרבילית ב - $[0,1]$.

$0 < \alpha$: 0 נקודת סינגולריות יחידה ב - $[0,1]$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \alpha = 1: & \lim_{t\to 0^+}[\log(x)]_t^1 = \lim_{t\to 0^+}(-\log(t)) = \infty \\ \alpha \ne 1: & \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{(1-\alpha)\cdot x^\alpha}\right]_t^1 = \begin{cases} 1 < \alpha & : \quad \infty \\ 0 < \alpha < 1 & : \quad \text{סופי} \end{cases} \end{cases}$$

לכן:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx < \infty \iff \alpha \le 0 \ \vee 0 < \alpha < 1$$

למשל:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \infty \quad ; \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \infty$$

■

הערה

משפט ההצבה (גרסה 2), כאשר f אינטגרבילית ב - $[a,b]$, נכון גם עבור פונקציה g **מונוטונית יורדת ממש**, גזירה ברציפות ועל.

רעיון

הפונקציה:

$$\tilde{g}(t) \coloneqq (a+b) - g(t)$$

עולה, גזירה ברציפות ועל, והפונקציה:

$$\tilde{f}(x) \coloneqq f\big((a+b) - x\big)$$

אינטגרבילית ב - $[a,b]$.

נפעיל את משפט ההצבה (גרסה 2) עבור הפונקציות $\tilde{f}(x), \tilde{g}(t)$.

$$\blacksquare$$

הערה

תהי f אינטגרבילית בכל תת קטע של $(a,b]$ ו a – נקודת סינגולריות (יחידה) של f.

אזי:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

נציב:

$$x \coloneqq a + \frac{1}{y} \implies dx = -\frac{1}{y^2}\,dy$$

$$t \le x \le b \implies \frac{1}{t-a} \le y \le \frac{1}{b-a}$$

$a+\frac{1}{y}$ זוהי פונקציה יורדת ממש, לכן עפ"י ההערה:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_{\frac{1}{t-a}}^{\frac{1}{b-a}} f\left(a+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{t-a}} f\left(a+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y^2}\,dy$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(a+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y^2}\,dy$$

לכן, כל אינטגרל לא אמיתי מסוג שני הוא אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון (ולהיפך).

לכן, המשפטים עבור אינטגרלים לא אמיתיים מסוג ראשון, תקפים גם עבור אינטגרלים לא אמיתיים מסוג שני (עם שינויים מתאימים).

$\blacksquare$