תרגיל 8 אלגברה ליניארית למורים באר שבע תש"ף

17 ביוני 2020

1. בדקו האם הקבוצה A פורשת את המרחב V:

(א) $V=\mathbb{R}_2[x]$, $A=\left\{x^2+2x+2, x-2, 5x^2+4\right\}$.

פתרון: נבדוק האם לכל פולינומים $a+bx+cx^2\in V$ קיימים סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כך ש

$$\alpha_1\left(2+3x+x^2\right)+\alpha_2(-2+x)+\alpha_3(4+5x^2)=a+bx+cx^2$$

או בסידור מחדש של אגף שמאל

$$(2\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3)+(3\alpha_1+\alpha_2)\,x+(\alpha_1+5\alpha_3)\,x^2=a+bx+cx^2$$

שלפי השוואות מקדמי הפולינומים, זאת המערכת

$$\begin{cases}2\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3 & =a\\ 3\alpha_1+\alpha_2 & =b\\ \alpha_1+5\alpha_3 & =c\end{cases}$$

שנפתור אותה ע"י דירוג הייצוג המטריצי שלה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 4 & a \\ 3 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 5 & c \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & c \\ 3 & 1 & 0 & b \\ 2 & -2 & 4 & a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & c \\ 0 & 1 & -15 & b-3c \\ 0 & -2 & -6 & a-2c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & c \\ 0 & 1 & -15 & b-3c \\ 0 & 0 & -36 & a-2c+2b-6c \end{array}\right)$$

קיבלנו שתמיד יש פתרון ולכן התשובה היא שהקבוצה A פורשת את V

(ב) $V = \mathbb{R}^4$,

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -14 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

פתרון: נבדוק האם לכל $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in V$ קיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ כך ש

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha_5 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -14 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

שלפי כפל עמודה ניתן לכתוב

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 9 & 1 \\ 3 & -1 & -7 & 0 & -14 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

שזה שקול לכך שאחרי דירוג של $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 9 & 1 \\ 3 & -1 & -7 & 0 & -14 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ לא תהיה שורת אפסים. נדרג ונבדוק

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 9 & 1 \\ 3 & -1 & -7 & 0 & -14 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -8 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & -13 & -13 & 0 & -26 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -8 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & -13 & -13 & 0 & -26 \\ 0 & -13 & -7 & 6 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow -\frac{1}{13} R_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -8 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -13 & -7 & 6 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & -13 & -7 & 6 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 + 13R_2]{R_3 \leftarrow R_3 + 8R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - \frac{6}{9} R_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שורת אפסים ולכן A אינה פורשת את V.

(ג) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 37 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}$.

פתרון: נבדוק האם לכל מטריצה $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$ קיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

כך ש

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}6&2\\37&1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

או בסידור מחדש של אגף שמאל

$$\begin{pmatrix}\alpha_1+6\alpha_2+4\alpha_3&2\alpha_1+2\alpha_2\\2\alpha_1+37\alpha_2&2\alpha_1+\alpha_2+4\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

שלפי השוואות רכיבי המטריצה, זאת המערכת

$$\begin{cases}\alpha_1+6\alpha_2+4\alpha_3&=a\\2\alpha_1+2\alpha_2&=b\\2\alpha_1+37\alpha_2&=c\\2\alpha_1+\alpha_2+4\alpha_3&=d\end{cases}$$

שבכתיב מטיריצי

$$\begin{pmatrix}1&6&4\\2&2&0\\2&37&0\\2&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

ולכן השאלה שקולה לכך שאין שורת אפסים אחרי דירוג של המטריצה $\begin{pmatrix}1&6&4\\2&2&0\\2&37&0\\2&1&4\end{pmatrix}$.

נדרג ונבדוק:

$$\begin{pmatrix}1&6&4\\2&2&0\\2&37&0\\2&1&4\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

קיבלנו שורת אפסים ולכן A אינה פורשת את V.

2. בדקו האם הקבוצה $A\subseteq V$ היא בת"ל:

(א) $V=\mathbb{R}_2[x]$, $A=\left\{x^2+2x+2,x-2,5x^2+4\right\}$.

פתרון: נניח צירוף לינארי של איברי A שווה לאיבר האפס של V,

$$\alpha_1\left(2+2x+x^2\right)+\alpha_2\left(-2+x\right)+\alpha_3\left(4+5x^2\right)=0+0x+0x^2$$

ונבדוק האם בהכרח המקדמים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ שווים כולם אפס. נסדר מחדש את האגף שמאל של השיוויון

$$\left(2\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3\right)+\left(2\alpha_1+\alpha_2\right)x+\left(\alpha_1+5\alpha_3\right)x^2=0+0x+0x^2$$

ומהשוואת מקדמי הפולינומים, נקבל את המערכת

$$\begin{cases}2\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3 & =0\\ 3\alpha_1+\alpha_2 & =0\\ \alpha_1+5\alpha_3 & =0\end{cases}$$

ונבדוק האם יש לה רק את הפתרון הטריוואלי. נדרג את המטריצה שמייצגת את מערכת המשוואות הזאת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-2&4&0\\3&1&0&0\\1&0&5&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&5&0\\3&1&0&0\\2&-2&4&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-2R_1]{R_2\leftarrow R_2-3R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&5&0\\0&1&-15&0\\0&-2&-6&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+2R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&5&c\\0&1&-15&b-3c\\0&0&-36&a-2c+2b-6c\end{array}\right)$$

הגענו לצורה מדורגת, ללא שורת סתירה (זה תמיד קורה במערכת הומוגנית), ללא משתנים חופשיים ולכן יש לה רק פתרון אחד והוא הפתרון הטרוואלי. לכן הקבוצה A בת"ל.

(ב) $V=\mathbb{R}^4$,

$$.A=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\-7\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\9\\0\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\\-14\\-4\end{pmatrix}\right\}$$

פתרון: נניח צירוף לינארי של איברי A שווה לאיבר האפס של V,

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}4\\0\\-1\\3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\5\\-7\\1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}0\\9\\0\\6\end{pmatrix}+\alpha_5\begin{pmatrix}4\\1\\-14\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ונבדוק האם בהכרח המקדמים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ שווים כולם אפס. השיוויון לעיל ניתן לכתיבה, לפי כפל עמודה, ע"י

$$\begin{pmatrix}1&4&2&0&4\\2&0&5&9&1\\3&-1&-7&0&-14\\4&3&1&6&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

וצריך לבדוק האם לאחר דירוג של $\begin{pmatrix}1&4&2&0&4\\2&0&5&9&1\\3&-1&-7&0&-14\\4&3&1&6&-4\end{pmatrix}$ בכל העמודות יש איבר מוביל או לא (שזה אומר האם יש רק משתנים תלויים במערכת או שיש משתנים חופשיים. שזה אומר אם יש רק את הפתרון הטריוואלי או שיש פתרון

נוסף). נדרג ונבדוק

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 9 & 1 \\ 3 & -1 & -7 & 0 & -14 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -8 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & -13 & -13 & 0 & -26 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -8 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & -13 & -13 & 0 & -26 \\ 0 & -13 & -7 & 6 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow -\frac{1}{13} R_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -8 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -13 & -7 & 6 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & -13 & -7 & 6 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 + 13R_2]{R_3 \leftarrow R_3 + 8R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - \frac{6}{9} R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו שיש משתנים חופשיים (הרביעי והחמישי) ולכן הקבוצה A ת"ל.

(ג) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 37 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}$.

פתרון: נניח צירוף לינארי של איברי A שווה לאיבר האפס של V,

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 37 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ונבדוק האם בהכרח המקדמים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ שווים כולם אפס. אחרי סידור מחדש

של אגף שמאל נקבל

$$\begin{pmatrix} \alpha_1+6\alpha_2+4\alpha_3 & 2\alpha_1+2\alpha_2 \\ 2\alpha_1+37\alpha_2 & 2\alpha_1+\alpha_2+4\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שלפי השוואות רכיבי המטריצה, זאת המערכת

$$\begin{cases} \alpha_1+6\alpha_2+4\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1+2\alpha_2 &= 0 \\ 2\alpha_1+37\alpha_2 &= 0 \\ 2\alpha_1+\alpha_2+4\alpha_3 &= 0 \end{cases}$$

שבכתיב מטיריצי

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 37 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

וצריך לבדוק האם לאחר דירוג של $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 37 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ בכל העמודות יש איבר מוביל או לא (שזה אומר האם יש רק משתנים תלויים במערכת או שיש משתנים חופשיים. שזה אומר אם יש רק את הפתרון הטריוואלי או שיש פתרון נוסף). נדרג ונבדוק:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 37 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ואכן בכל עמודה יש איבר מוביל, כלומר אין משתנים חופשיים ולכן יש רק את הפתרון הטריוואלי ולכן הקבוצה A בת"ל.

3. ב-$\mathbb{R}^3$, נתבונן בקבוצה הבאה:

$$A=\left\{\begin{pmatrix}1\\k\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}k\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\k\end{pmatrix}\right\}$$

כאשר k פרמטר ממשי. מצאו לאלו ערכים של k הקבוצה A היא בת"ל, ולאלו ערכים של k הקבוצה A פורשת את $\mathbb{R}^3$.

פתרון: בת"ל: ננניח צירוף לינארי של איברי A שווה לאיבר האפס של $\mathbb{R}^3$,

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\k\\-1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}k\\1\\2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\-2\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ונבדוק לאילו ערכי k, בהכרח המקדמים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ שווים כולם אפס. השיוויון לעיל ניתן לכתיבה, לפי כפל עמודה, ע"י

$$\begin{pmatrix}1&k&2\\k&1&-2\\-1&2&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

וצריך לבדוק לאילו ערכי k, לאחר דירוג של $\begin{pmatrix}1&k&2\\k&1&-2\\-1&2&k\end{pmatrix}$ בכל העמודות יש איבר מוביל (שזה אומר שיש רק משתנים תלויים. שזה אומר אם יש רק את הפתרון הטריוואלי). נדרג ונבדוק:

$$\begin{pmatrix}1&k&2\\k&1&-2\\-1&2&k\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3+R_1]{R_2\leftarrow R_2-kR_1}\begin{pmatrix}1&k&2\\0&1-k^2&-2-2k\\0&2+k&k+2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&k&2\\0&2+k&k+2\\0&1-k^2&-2-2k\end{pmatrix}$$

כעת, אם $k\neq-2$ נוכל להמשיך לדרג

$$\begin{pmatrix}1&k&2\\0&2+k&k+2\\0&1-k^2&-2-2k\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-\frac{1-k^2}{2+k}R_2}\begin{pmatrix}1&k&2\\0&2+k&k+2\\0&0&-3-2k+k^2\end{pmatrix}$$

ובכל העמודה יהיה איבר מוביל אמ"מ $-3-2k+k^2 \neq 0$ שזה קורהעבור $k \neq 3, -1$.

אם $k=-2$ נקבל את המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

וקיבלנו במקרה זה שיש משתנה חופשי ולכן עבור $k=-2$ הקבוצה A ת"ל. לסיכום: הקבוצה A ת"ל במקרים ש $k=-2,3,-1$ בלבד.

פרישה: נבדוק לאילו ערכי k מתקיים: לכל $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ קיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כך ש

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

שלפי כפל עמודה ניתן לכתוב

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ k & 1 & -2 \\ -1 & 2 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

שזה שקול לכך שאחרי דירוג של $\begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ k & 1 & -2 \\ -1 & 2 & k \end{pmatrix}$ לא תהיה שורת אפסים. נדרג ונבדוק

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ k & 1 & -2 \\ -1 & 2 & k \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 + R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - kR_1} \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & 1-k^2 & -2-2k \\ 0 & 2+k & k+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & 2+k & k+2 \\ 0 & 1-k^2 & -2-2k \end{pmatrix}$$

כעת, אם $k \neq -2$ נוכל להמשיך לדרג

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & 2+k & k+2 \\ 0 & 1-k^2 & -2-2k \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1-k^2}{2+k} R_2} \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & 2+k & k+2 \\ 0 & 0 & -3-2k+k^2 \end{pmatrix}$$

ולא תהיה שורת אפסים אמ"מ $-3-2k+k^2 \neq 0$ שזה קורהעבור $k \neq 3, -1$.

אם $k = -2$ נקבל את המערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שיש בה שורת אפסים וקיבלנו במקרה שהקבוצה A אינה פורשת את $\mathbb{R}^3$. לסיכום: הקבוצה A פורשת את $\mathbb{R}^3$ במקרים ש $k \neq -2, 3, -1$ בלבד.
הערה: התשובות לשתי השאלות (בת"ל/פרישה) יצאו זהות מכיוון שהמטריצה ריבועית. באופן כללי לא חייבת לצאת אותה תשובה.

4. יהי V מרחב וקטורי ויהיו $v_1, \dots, v_n \in V$ כך שהוקטור v_n הוא צירוף ליניארי של הוקטורים $v_1, \dots, v_{n-1}$. הוכיחו שהקבוצה $\{v_1, \dots, v_n\}$ תלויה ליניארית.
פתרון: נניח שהוקטור v_n הוא צירוף ליניארי של הוקטורים $v_1, \dots, v_{n-1}$ אזי קיימים סקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ כך ש

$$v_n = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1}$$

ובהעברת אגף נקבל

$$v_n - \alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_{n-1} v_{n-1} = 0$$

וקיבלנו צירוף לינארי לא טרוואלי של $v_1, \dots, v_n$ (המקדם של v_n הוא 1) ששווה לוקטור האפס ולכן $v_1, \dots, v_n$ ת"ל.

5. יהיו $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^k$ וקטורים ותהי $A \in \mathbb{R}^{m \times k}$. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $v_1, \dots, v_n$ בת"ל אז $Av_1, \dots, Av_n$ בת"ל.

פתרון: הפרכה:למשל עבור $\mathbb{R}^2 \ni v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ בת"ל אבל

אחרי כפל במטריצה $A = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)$ נקבל

$$Av_1 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right), Av_2 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right)$$

שת"ל.

(ב) אם $Av_1, \ldots, Av_n$ בת"ל אז $v_1, \ldots, v_n$ בת"ל.

פתרון: הוכחה:נניח כי $Av_1, \ldots, Av_n$ בת"ל ונוכיח כי $v_1, \ldots, v_n$ בת"ל. יהא צירוף לינארי

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

של $v_1, \ldots, v_n$ ששווה לוקטור האפס ונוכיח כי בהכרח זהו הצירוף הלינארי הטרוויאלי. אכן, על השוויון לעיל נפעיל את A על שני האגפים ונקבל

$$A \left(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \right) = A0$$

ומכיוון שמתקיימת תכונת הפילוג והוצאת סקלר נקבל

$$\alpha_1 Av_1 + \cdots + \alpha_n Av_n = A \left(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \right) = A0 = 0$$

(בנוסף, לכך שכפל A בוקטור האפס שווה לוקטור האפס). כעת, מההנחה ש $Av_1, \ldots, Av_n$ בת"ל (ומכך שלפנינו צירוף לניארי של $Av_1, \ldots, Av_n$ ששוה לוקטור האפס) נקבל כי המקדמים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ כולם שווים אפס כנדרש.