צורת ז'ורדן

משפט: [Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922)]

תהי $A\in F^{n\times n}$ מטריצה ריבועית שהפא״א שלה מתפרק לגורמים לינאריים מעל F. אזי A דומה למטריצה בצורת ז'ורדן

$$\underset{\text{הפיכה}}{\exists P\in F^{n\times n}} : P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_t \end{bmatrix}$$

כאשר כל J_i הוא בלוק ז'ורדן, מהצורה:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

המטריצה J יחידה, עד כדי סדר הבלוקים.

הערה: צורת ז'ורדן היא משולשית עליונה, ולכן λ_i הם הע״ע של A; כל ע״ע מופיע בבלוק אחד או יותר.

הוכחה: (עפ״י ויקיפדיה באנגלית)

קיום: נוכיח באינדוקציה על n.

$n=1$: אמ״ל.

שלב האינדוקציה: נניח שהמשפט נכון למטריצות ריבועיות מסדר $< n\times n$.

תהי $A\in F^{n\times n}$, ויהי $\lambda\in F$ ע״ע של A (קיים, כי $f_A(x)$ מפ״ל).

נזהה את A גם כאל אופרטור לינארי $"A": F^{n\times 1}\to F^{n\times 1}$, $v\mapsto Av$, כך שנוכל לדבר על הגרעין $\ker A$ והתמונה $\operatorname{im} A$.

נסמן:

$$V_1 := \operatorname{im}(A-\lambda I), \qquad k := \dim V_1$$
$$V_2 := \ker(A-\lambda I), \qquad l := \dim V_2$$
$$V_3 := V_1\cap V_2, \qquad m := \dim V_3$$

המטריצה $A-\lambda I$ אינה הפיכה (כי λ ע״ע של A), ולכן $\underline{k<n}$.

כמו כן, בגלל משפט הממד״ים: $k+l = \dim\operatorname{im}(\ ) + \dim\ker(\ ) = \underline{\underline{n}}$.

תתי המרחבים $V_1, V_2 \subseteq F^{n\times 1}$ נשמרים תחת A (כי A מתחלפת עם $A-\lambda I$):

$$v\in V_1 \Rightarrow \exists w\in F^{n\times 1}\ (v=(A-\lambda I)w) \Rightarrow Av = A(A-\lambda I)w = (A-\lambda I)\underline{Aw} \in V_1$$

$$v\in V_2 \Rightarrow (A-\lambda I)v=\vec{0} \Rightarrow (A-\lambda I)Av = A(A-\lambda I)v = A\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow Av\in V_2$$

הצמצום $"A"|_{V_2}$ הוא אופרטור סקלרי: $"A"|_{V_2} = \lambda I$ כי $Av=\lambda v \Leftarrow v\in V_2$

הצמצום $"A"|_{V_1} =: "A_1"$ הוא אופרטור, המיוצג ע"י מטריצה A_1 (בבסיס כלשהו של V_1). אם נרחיב לבסיס של $\mathbb{F}^{n\times 1}$ נקבל:

$$A \sim \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & C_1 \end{bmatrix}$$

~~לכן~~ נגדיר זאת, נקח det ונקבל: $f_A(x) = f_{A_1}(x)\cdot f_{C_1}(x)$

לכן $f_{A_1}(x) \mid f_A(x)$. לפי הנתון $f_A(x)$ מג"ל, לכן גם $f_{A_1}(x)$ מג"ל.
$A_1 \in \mathbb{F}^{k\times k}$, $k<n$ לכן לפי הנחת האינדוקציה יש ל-A_1 צורת ז'ורדן: $A_1 \sim J'$.

אם $m=0$, כלומר $V_1\cap V_2=\{\vec{0}\}$, אז הסכום V_1+V_2 הוא סכום ישר ומשיקולי ממדים $(k+l=n)$: $V_1\oplus V_2=\mathbb{F}^{n\times 1}$. נקבל, ע"י בחירת בסיסים ל-V_1, V_2 (שאיחודם הוא בסיס ל-V):

$$A \sim \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} J' & 0 \\ 0 & \lambda I \end{bmatrix} = J$$

(למטריצה סקלרית, או אלכסונית כלשהי, בלוקי ז'ורדן 1×1).

נניח אם כן: $\underline{m\neq 0}$.

יהי $\{v_1,\dots,v_k\}$ בסיס של $V_1=\mathrm{im}(A-\lambda I)$ שעבורו $"A_1"$ מיוצג ע"י צורת ז'ורדן:

$$J' = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_t \end{bmatrix}$$

במקרה $\ker(J'-\lambda I) = \bigoplus_{i=1}^{t} \ker(J_i-\lambda I)$

עבור כל בלוק ז'ורדן $J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_i \end{bmatrix}$,

$$\ker(J_i-\lambda I) = \begin{cases} \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\right\}, & \lambda_i=\lambda \text{ אם} \\ \{\vec{0}\}, & \lambda_i\neq\lambda \text{ אם} \end{cases}$$

אם $e^1,\dots,e^d$ הם וקטורי יחידה סטנדרטיים ($J_i\in\mathbb{F}^{d\times d}$) אז $J_i-\lambda_i I$ מעתיק: $e^d \mapsto e^{d-1} \mapsto \cdots \mapsto e^1 \mapsto \vec{0}$. e^d נקרא <u>יוצר</u> של בלוק ז'ורדן זה.

כמו כן: $J_i-\lambda I:\ e^d \mapsto (\lambda_i-\lambda)e^d + e^{d-1},\ \dots,\ e^1 \mapsto (\lambda_i-\lambda)e^1+\vec{0}$

נתבונן לבסיס $\{v_1,\dots,v_k\}$ של V_1, שעבורו "A_1" מיוצגת ע"י J'.
כאמור, בכל בלוק ג'ורדן ~~...~~ המתאים ל-λ יש
וקטור יחיד (עד כדי כפל בסקלר) מתוך $V_2=\ker(A-\lambda I)$; בבלוקים
אחרים אין בכלל (רק $\vec{0}$). לכן מס' בלוקי ג'ורדן של J' המתאימים
לע"ע λ הוא בדיוק $m=\dim(V_1\cap V_2)$.

~~ע"י מספור מחדש נוכל להניח: $\{v_1,\dots,v_m\}$ בסיס ל- $V_3=V_1\cap V_2$.~~

~~... של בלוקים אלו (מתאימים לוקטורים באחרונים ...~~

1. הבסיס $\{v_1,\dots,v_k\}$ הוא איחוד הבסיסים של התמ"ה המתאימים לכל הבלוקים. בכל בסיס כזה יש, כאמור, יוצר. ע"י מספור מחדש נוכל להניח ש-$\{v_1,\dots,v_m\}$ הם היוצרים של בלוקי ג'ורדן המתאימים לע"ע λ. (אלו "ע"ע מובלים": $(A-\lambda I)^d v=\vec{0}$, כאשר הבלוק הוא $d\times d$).

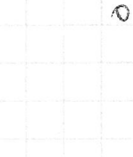
2. ~~...~~ מכיוון ש-v_i ש"כים כולם ל-$V_1=\mathrm{im}(A-\lambda I)$, קיימים $u_1,\dots,u_m\in\mathbb{F}^{n\times 1}$ כך ש-: $v_i=(A-\lambda I)u_i$ $(1\le i\le m)$

3. נקח בסיס $\{w_1,\dots,w_m\}$ של $V_3=V_1\cap V_2$, ונשלים אותו לבסיס $\{w_1,\dots,w_m,w_{m+1},\dots,w_\ell\}$ של $V_2=\ker(A-\lambda I)$ ~~$V_2=\ker(A-\lambda I)$~~,

<u>טענה:</u> $\{u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_k,w_{m+1},\dots,w_\ell\}$ הוא בסיס ל-$\mathbb{F}^{n\times 1}$, שעבורו "A" מיוצג ע"י צורת ג'ורדן.

(עבור $m=0$ לקחנו את איחוד הבסיסים $\{v_1,\dots,v_k\}$ של V_1, $\{w_1,\dots,w_\ell\}$ של V_2; כאן $V_1\cap V_2\neq\{\vec{0}\}$, לכן צריכים את $w_1,\dots,w_m$ ובמקומם לוקחים את המקורות $u_1,\dots,u_m$ של $v_1,\dots,v_m$.)

<u>הוכחת הטענה:</u> ראשית, המספר נכון: $m+k+(\ell-m)=k+\ell=n$.
שנית, אם זה בסיס אז "A" מיוצגת ע"י צורת ג'ורדן המתקבלת מ-J'
ע"י הוספת u_i בסוף הבלוק המתאים (אחרי ה"יוצר" v_i): הוספת בלוק 1×1 $\boxed{\lambda}$ לכל w_i



$$Au_i=v_i+\lambda u_i$$

נותר להוכיח שהוקטורים הנ"ל בת"ל.

נניח צ"ל מתאפס: $\alpha_1u_1+\dots+\alpha_mu_m+\beta_1v_1+\dots+\beta_kv_k+\gamma_{m+1}w_{m+1}+\dots+\gamma_\ell w_\ell=\vec{0}$

נפעיל את $A-\lambda I$, ונזכור כי: $(A-\lambda I)u_i=v_i$, $(A-\lambda I)w_i=\vec{0}$

$$\alpha_1v_1+\dots+\alpha_mv_m+\beta_1(A-\lambda I)v_1+\dots+\beta_k(A-\lambda I)v_k=\vec{0}$$

$\{v_1,\dots,v_k\}$ הוא איחוד בסיסים עבור בלוקי ז'ורדן של J.
בכל בלוק עם ע"ע $\lambda \neq \lambda_j$, "$A-\lambda I$" הוא הפיך ולכן מעתיק את הבסיס לבסיס, וכמסקנה $\beta_i=0$ שם. בכל בלוק עם $\lambda=\lambda_j$ נוסף u_i אחד, ו-"$A-\lambda I$" מעתיקה $u_i \mapsto v_i = e^d \mapsto e^{d-1} \mapsto \dots \mapsto e^1 \mapsto \vec{0}$. לכן שוב $\alpha_i=0$ וגם $\beta_i=0$, פרט ל-β_i המתאימים ל-v_i שהם <u>ע"ע</u> (e^1). אם נסמן אותם $\tilde{v}_i$ ונחזור לצ"ל המקורי, נקבל: $\tilde{\beta}_1\tilde{v}_1+\dots+\tilde{\beta}_m\tilde{v}_m+\gamma_{m+1}w_{m+1}+\dots+\gamma_\ell w_\ell=\vec{0}$

עכשיו $\{\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_m\}$ הוא בסיס ל-$V_3=V_1\cap V_2$, ואילו $w_{m+1},\dots,w_\ell$ משלימים אותם לבסיס של V_2. לכן גם $\tilde{\beta}_i=0$, $\gamma_i=0$ והוקטורים בת"ל. □

~~הערה: ממשפט ז'ורדן קל להסיק את משפט קיילי~~

<u>משפט:</u> תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ ע"ע של A.
(א) הריבוי האלגברי של λ (ריבוי λ בפ"א) שווה לסכום גדלי בלוקי ז'ורדן המתאימים ל-λ.
(ב) הריבוי הגאומטרי של λ (ממד המ"ע) שווה ~~לגודל המירבי של~~ למספר בלוקי ז'ורדן המתאימים ל-λ.
(ג) הריבוי של λ בפ"מ שווה לגודל המירבי של בלוק ז'ורדן המתאים ל-λ.

<u>מסקנה:</u> תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. התנאים הבאים שקולים:
(א) A לכסינה.
(ב) הפ"א של A מל"ל, וכל בלוקי ז'ורדן הם בגודל 1×1.
(ג) הפ"א של A מל"ל, והריבוי האלגברי של כל ע"ע שווה לריבוי הגאומטרי.
(ד) הפ"מ של A מתפרק לגורמים לינאריים <u>שונים</u>.