אלגברה לינארית למהנדסים - פתרון תרגיל בית 7

1. יהי V ממ"פ (עם נורמה מושרת). $0 \neq v \in V$ הוכח כי הגודל של $\frac{v}{||v||}$ הוא 1 (תזכורת גודל של וקטור w הוא $||w||$).
פתרון: $\frac{1}{||v||}$ הינו סקלאר ולכן יכול לצאת מהנורמה (כיוון שחיובי לא צריך להוסיף ערך מוחלט) כלומר
$||\frac{v}{||v||}|| = ||\frac{1}{||v||}v|| = \frac{1}{||v||}||v|| = 1$

2. יהי V ממ"פ . W, U תתי מרחב. הוכח: $(W+U)^{\perp} = W^{\perp} \cap U^{\perp}$
הוכחה בעזרת הכלה דו־כיוונית:
($\subseteq$) יהא $v \in (W+U)^{\perp}$. לכל $w \in W,\ u \in U$ מתקיים $w = w+0,\ u = 0+u \in W+U$ ולכן v מאונך אליהם ובפרט שייך ל־$W^{\perp} \cap U^{\perp}$
($\supseteq$) יהא $v \in W^{\perp} \cap U^{\perp}$ $(< w, v >=< u, v >= 0)$. צ"ל $v \in (W+U)^{\perp}$ לשם כך יהיה $w + u \in W + U$ ואכן $< w+u, v >=< w, v > + < u, v >= 0 + 0 = 0$ ולכן $v \in (W+U)^{\perp}$ ■

3. יהי V ממ"פ. $0 \notin B = \{v_1, \dots v_n\}$ קבוצה אורתוגנלית. הוכח: B בת"ל. (הדרכה: התבונן בצ"ל שמתאפס והפעל מכפלה פנימית על שני הצדדים עם v_j).
פתרון: יהא $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$ צ"ל $\alpha_i = 0$ לכל i . נפעיל מכפלה פנימית עם v_j מסוים.
$< \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, v_j >=< 0, v_j >= 0$ כיוון ש B אורתוגונלי נקבל
$0 =< \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, v_j >= \alpha_1 < v_1, v_j > + \cdots + \alpha_j < v_j, v_j > + \cdots \alpha_n < v_n, v_j >= \alpha_j ||v_j||^2$
כיוון ש $0 \notin B$ כי $v_j \neq 0$ זה גורר ש . מכיוון שזה נכון לכל j נקבל את הדרוש. ■

נראה שימוש להטלות:

4. תהא $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. נרצה לפתור את המערכת $Ax = b$. אם נמצא את מרחב העמודות (אין צורך) נגלה כי b לא נמצא ב $C(A)$ ולכן אין פתרון למערכת הנ"ל. לכן נרצה למצוא b' כך ש $b' \in C(A)$ שהוא קרוב ל b (במובן ש $||b - b'||$ מינמאלי. שימו לב ש $b - b'$ מציין את הסטייה מהפתרון המבוקש).
במילים אחרות: מצאו את ההטלה של b למרחב העמודות $C(A)$ בעזרת הסעיפים הבאים:

(א) מצאו בסיס אורתוגונלי ל $C(A)$ בעזרת תהליך גרם שמידט (עמודות A בת"ל־ אין צורך לבדוק זאת).
(ב) כעת קל להטיל את b ל $C(A)$־ עשו זאת.
(ג) חשבו את גודל הטעות כלומר $||b - b'||$

פתרון: הקדמה: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 3 & 0 & b \\ 1 & 4 & 1 & c \\ 1 & 5 & -2 & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 2 & 0 & c-a \\ 0 & 3 & -3 & d-a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 2 & c+a-2b \\ 0 & 0 & 0 & d+2a-3b \end{pmatrix}$ ומכאן
רואים שאכן עמודות A בת"ל ו $b \notin C(A)$.

א) נסמן $v_3=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ כיוון שעמודות A בת"ל $\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס ל $C(A)$. נפעיל גרם שמידט.

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1\\
w_2 &= v_2-\frac{<v_2,w_1>}{||w_1||^2}w_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\\
w_3 &= v_3-\frac{<v_3,w_1>}{||w_1||^2}w_1-\frac{<v_3,w_2>}{||w_2||^2}w_2\\
&= \begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}-\frac{6}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{8}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

כלומר $\{w_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, w_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, w_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\}$ בסיס אורתוגנלי ל $C(A)$.

ב) $b=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ לפי מה שראינו בתרגול ההיטל שווה ל

$b^{'}=\frac{<b,w_1>}{||w_1||^2}w_1+\frac{<b,w_2>}{||w_2||^2}w_2+\frac{<b,w_1>}{||w_1||^2}w_3$ נחשב כל אחד בנפרד

$$\frac{<b,w_1>}{||w_1||^2}w_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \frac{<b,w_2>}{||w_2||^2}w_2=\frac{2}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ \frac{<b,w_3>}{||w_3||^2}w_1=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

בסה"כ ההיטל הוא $b^{'}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\3\\3\\5\end{pmatrix}$

ג) $||b-b^{'}|| = ||\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}|| = ||\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}|| = \frac{1}{4}||\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}|| = \frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{1}{2}$

5. יהא $V = \mathbb{C}_1[x] = \{a+bx \,|\, a,b \in \mathbb{C}\}$. $B=\{1,x\}$ בסיס סטנדרטי של V. בעזרת תהליך גרם שמידט מצא בסיס אורתונורמלי ל V (ביחס למכפלה הפנימית $<f,g>=\int\limits_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$)

פתרון: נסמן $f_1 = 1,\ f_2 = x$ נשתמש בתהליך גרם שמידט

$g_1 = f_1$

$g_2 = f_2 - \frac{<f_2,g_1>}{||g_1||^2}g_1 = x - \frac{\int_0^1 x\cdot 1\,dx}{\int_0^1 1\cdot 1\,dx}\cdot 1 = x - \frac{(\frac{1}{2})}{1} = x - \frac{1}{2}$.

נורמל את $g_1,\ g_2$:

$||g_1||^2 = 1$ ולכן $||g_1|| = 1$

$||g_2||^2 = \int\limits_0^1 (x-\frac{1}{2})^2\,dx = \int\limits_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ ולכן $||g_2|| = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

לסיכום $\{\frac{g_2}{||g_2||},\ \frac{g_1}{||g_1||}\} = \{2\sqrt{3}(x-\frac{1}{2}),\ 1\}$ בסיס אורתונומלי ל V.

בהצלחה!