עוד תרגול חזרה - כי מפנקים אתכם נורא

27 ביולי 2015

נפתור את מועד א' משנת תש"ע.

1. יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ מרחבים טופולוגיים, ונסמן ב: $p_\beta\colon \prod_{\alpha\in I} X_\alpha :\to X_\beta$ את ההטלות.
יהי Z מרחב טופולוגי, ותהי $f: Z\to \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ פונקציה המקיימת ש: $p_\alpha\circ f$ רציפה לכל $\alpha\in I$. הראו ש$-f$ רציפה.

<u>פתרון:</u>

נראה שהתמונה ההפוכה של קבוצה פתוחה (בסיסית) היא קבוצה פתוחה.

תהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ קבוצה פתוחה. כעת:

$$f^{-1}\left(\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}\right)=\left\{z\in Z|f(z)\in\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}\right\}=\{z\in Z|\forall\alpha\in I:(p_\alpha\circ f)(z)\in U_\alpha\}=$$

והקבוצה הזו שווה ל:

$$\bigcap_{\alpha\in I}\{z\in Z|(p_\alpha\circ f)(z)\in U_\alpha\}$$

בקבוצה $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$, למעט מספר סופי של אינדקסים $i_1,\dots,i_n$, מתקיים: $U_\alpha=X_\alpha$.
לכן, עבור $\alpha\in I\backslash\{i_1,\dots,i_n\}$, מתקיים:

$$\{z\in Z|(p_\alpha\circ f)(z)\in U_\alpha\}=\{z\in Z|(p_\alpha\circ f)(z)\in X_\alpha\}=Z$$

ולכן:

$$\bigcap_{\alpha\in I}\{z\in Z|(p_\alpha\circ f)(z)\in U_\alpha\}=\bigcap_{j=1}^{n}\{z\in Z|(p_{i_j}\circ f)(z)\in U_{i_j}\}=\bigcap_{j=1}^{n}\left(p_{i_j}\circ f\right)^{-1}\left(U_{i_j}\right)$$

מהנתון, $p_{i_j}\circ f$ רציפות לכל j ולכן הקבוצות:

$$\left(p_{i_j}\circ f\right)^{-1}\left(U_{i_j}\right)$$

פתוחות ב$-Z$ כתמונות הפוכות של קבוצות פתוחות, ולכן:

$$f^{-1}\left(\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}\right)=\bigcap_{j=1}^{n}\left(p_{i_j}\circ f\right)^{-1}\left(U_{i_j}\right)$$

פתוחה כחיתוך סופי של פתוחות.

תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה ולכן f רציפה.

2. יהי M מרחב מטרי, ותהי A קבוצה.

הראו ש$-A$ סגורה אם ורק אם לכל סדרה $\{a_n\}\subseteq A$ המתכנסת ב$-M$ ל$-x$, $x\in A$.

פתרון:

לכיוון הראשון, נניח ש$-A$ סגורה.

תהי $\{a_n\}\subseteq A$ סדרה המתכנסת ל$-x$ ונניח בשלילה ש$-A$ $x\notin$.

לכן, $x\in A^c$. מכיוון ש$-A$ סגורה, A^c פתוחה ולכן קיים $\varepsilon>0$ עבורו: $B(x,\varepsilon)\subseteq A^c$.

קיים n_0 טבעי המקיים $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$. מכיוון שהסדרה מתכנסת, לכל m טבעי קיים n_1 כך שלכל $n>n_1$, $a_n\in B(x,\frac{1}{m})$.

בפרט, עבור n_0 נקבל, אם כך, שהחל מ$-n$ מסויים $a_n\in B(x,\frac{1}{n_0})$, כלומר $a_n\in B(x,\varepsilon)$ ולכן $a_n\in A^c$, בסתירה לכך ש$-A$ $\{a_n\}\subseteq$!

לכן $x\in A$ והתנאי מתקיים.

לכיוון השני, נניח בשלילה ש$-A$ לא סגורה. לכן A^c לא פתוחה.

לכן, קיים $x\in A^c$ כך שלכל n טבעי, $B(x,\frac{1}{n})\nsubseteq A^c$, ולכן $B(x,\frac{1}{n})\cap A\neq\emptyset$.

לכל n טבעי נבחר $a_n\in B(x,\frac{1}{n})\cap A$. כעת, הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת ל$-x$ ומקיימת $\{a_n\}\subseteq A$, אך $x\notin A$ וסתירה!

לכן A סגורה.

3. יהי X מרחב המנה של $\mathbb{R}^3$ המוגדר על ידי יחס השקילות הבא: $(x_1,x_2,x_3) \sim (y_1,y_2,y_3)$ אם ורק אם $x_1=y_1$ וגם $x_2=y_2$.

הראו ש־X הומיאומורפי ל־$\mathbb{R}^2$.

<u>פתרון:</u>

נגדיר פונקציה: $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ על ידי:

$$f(x,y,z)=(x,y)$$

כעת, f מורכבת מההטלות p_1,p_2 שהן רציפות ופתוחות ולכן f רציפה ופתוחה (הסתכלו בשאלה 1).

ברור ש־f על, לכן f העתקת מנה ולכן גם $\hat{f}$ מנה (כאשר $\hat{f}:X\to\mathbb{R}^2$ היא ההעתקה המקיימת: $f=\hat{f}\circ\rho$. ρ היא ההעתקה $\rho:\mathbb{R}^3\to X$ המוגדרת על ידי $\rho(x)=[x]$).

כעת,

$$f(x_1,x_2,x_3)=f(y_1,y_2,y_3) \iff (x_1,x_2,x_3)\sim(y_1,y_2,y_3)$$

ולכן $\hat{f}$ חח"ע.

$\hat{f}$ חח"ע ומנה ולכן $\hat{f}$ הומיאומורפיזם.

4. יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים.

א. תהיינה $A\subseteq X, B\subseteq Y$ קבוצות סגורות. הראו שהקבוצה $A\times B$ סגורה.

ב. תהיינה $A\subseteq X, B\subseteq Y$ קבוצות. הראו ש: $\overline{A\times B}=\bar{A}\times\bar{B}$.

<u>פתרון:</u>

א. המשלים של הקבוצה הוא:

$$(A\times B)^c=(A^c\times Y)\cup(X\times B^c)$$

A^c, B^c פתוחות (כל אחת בקבוצה המתאימה לה) כמשלימות של סגורות, X, Y פתוחות ולכן גם $(A^c \times Y), (X \times B^c)$ פתוחות מהגדרת טופולוגיית המכפלה ולכן גם $(A \times B)^c$ פתוחה כאיחוד של פתוחות.

המשלים הוא קבוצה פתוחה ולכן $A \times B$ קבוצה סגורה.

ב. $\overline{A \times B}$ זו הקבוצה הסגורה המינימלית שמכילה את $A \times B$.

$\bar{A}, \bar{B}$ סגורות (כל אחת בקבוצה המתאימה לה) ולכן (לפי סעיף א') $\bar{A} \times \bar{B}$ סגורה.

$A \subseteq \bar{A}, B \subseteq \bar{B}$ ולכן $A \times B \subseteq \bar{A} \times \bar{B}$ סגורה, ולכן $\overline{A \times B} \subseteq \bar{A} \times \bar{B}$.

לכיוון השני, יהי $(a, b) \in \bar{A} \times \bar{B}$. תהי $U \times V$ סביבה (בסיסית) של (a, b).

מהתנאי השקול לסגור, לכל $U \subseteq X, V \subseteq Y$ סביבות של a, b מתקיים: $U \cap A, V \cap B \neq \emptyset$.

לכן, $(U \times V) \cap (A \times B) \neq \emptyset$ ולכן $(a, b) \in \overline{A \times B}$, מהתנאי השקול לסגור (על קבוצות בסיסיות).

לפי הכלה דו כיוונית קיבלנו את הדרוש.

5. א. יהי X מרחב טופולוגי. יהיו $A_1, \ldots, A_n$ תתי מרחבים קומפקטיים של X. הראו שגם $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ קומפקטי.

ב. יהי X מרחב טופולוגי האוסדורף. יהי $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף של תתי מרחבים קומפקטיים. הראו שגם $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ קומפקטי.

<u>פתרון:</u>

הסתכלו בתרגיל 9 .