

תרגיל 12 בדידה להנדסה:

1. הוכיחו את משפט קנטור: לכל קבוצה  $A$ ,  $|A| \neq |P(A)|$ . הדרכה: הניחו בשלילה שיש

פונקציה (חח"ע ו) על:

$$f : A \rightarrow P(A)$$

התבוננו בקבוצה  $B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$ . האם יש לה מקור?

2. תהי  $A$  קבוצה אינסופית. הראו שקיימת  $B \subset A$  (מוכלת ממש) כך שמתקיים:  $|A| =$

$$|B|$$

מותר להשתמש בעובדה שלכל קבוצה אינסופית יש תת קבוצה בת מניה.

הדרכה: סמנו את תת הקבוצה בת המניה ב-  $C = \{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . שימו לב כי  $A = C \cup (A \setminus C)$

איחוד זר. כעת חישבו על פונקציה שמוגדרת על הקבוצות  $C$  ו-  $A \setminus C$  "בנפרד".

3. תהיינה שתי קבוצות  $A, B$ . הוכיחו שאם  $|A \setminus B| = |B \setminus A|$  אז  $|A| = |B|$ .

הדרכה: שימו לב שמתקיים  $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ . הגדירו פונקציה על שתי הקבוצות

"בנפרד".

4. האם הקבוצות הבאות בנות מניה?

א.  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

ב.  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ .

ג.  $B_n = \{n^k \mid k \in \mathbb{N}\}$  כאשר  $n \in \mathbb{N}$ .

ד.  $B_n = \{n^k \mid k \in \mathbb{N}\}$  כאשר  $n \in \mathbb{Z}$ .

ה.  $(0, 1) \setminus (0, \frac{1}{2})$ .

5. הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $|A| = |B|$  והפונקציה  $f : A \rightarrow B$  חח"ע, אז  $f$  היא על.

ב. אם  $|A| = |B| = n$  והפונקציה  $f : A \rightarrow B$  חח"ע אז  $f$  היא על.