

מבחן באלגברה מופשטת 1  
(תורת החבורות)

מועד א' תשס"ח  
פרופ' יובל דויכמן

**חלק א'.** (50%) ענה על 2 מתוך 3 השאלות הבאות.

1. יהיו  $q > p$  מספרים ראשוניים כך ש  $q \not\equiv 1 \pmod{p}$ . הוכח: חבורה מסדר  $pq$  היא ציקלית.

2. יהי  $p$  מספר ראשוני ותהי  $G$  חבורה אבלית שסדרה מתחלק ע"י  $p$ . הוכח: ב-  $G$  יש אבר שסדרו  $p$ .

3. תהי  $G$  חבורה סופית הפועלת על קבוצה  $X$ . הוכח: סדר כל מסלול ב-  $X$  מחלק את סדר החבורה  $G$ .

**חלק ב'.** (50%) ענה על 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

4. נניח שקיים אפימורפיזם מ-  $S_5$  לחבורה  $G$ . מצא את  $G$  (מיין את האפשרויות עד כדי איזומורפיזם).

5. מיין את החבורות מסדר: (א) 9 (ב) 38 (ג) 77 (עד כדי איזומורפיזם).

6. הוכח או הפרך: כל חבורה מסדר:

(א) 119 (ב) 120 (ג) 121

היא חבורה פתירה.

7. הוכח: חבורת התמורות הזוגיות על 4 אותיות  $A_4$  אינה פשוטה.

מבחן באלגברה מופשטת 1  
(תורת החבורות)

מועד ב' תשס"ח  
פרופ' יובל רויכמן

**חלק א' (50%)** ענה על 2 מתוך 3 השאלות הבאות.

1. הוכח : לכל חבורה סופית ולכל  $p$  ראשוני המחלק את סדר החבורה קיימת תת-חבורה  $p$  סילוא.

2. הוכח : חבורת  $p$  היא חבורה פתירה.

3. יהי  $p$  מספר ראשוני ותהי  $G$  חבורה שסדרה  $2p$ . הוכח :  $G$  ציקלית או דיהדרלית .

**חלק ב' (50%)** ענה על 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

4. הוכח : חבורת התמורות  $S_4$  היא חבורה פתירה.

5. הוכח או הפרך. כל חבורה מסדר :

(א) 14 (ב) 15 (ג) 16

היא אבלית .

6. הוכח: החבורה הכפלית של הממשיים החיוביים אינה נוצרת סופית.

7. הוכח כי חבורת התמורות  $S_n$  נוצרת ע"י שני אברים .

בהצלחה !

מבחן באלגברה מופשטת 1 88-211  
(תורת החבורות)

מועד ג' תשס"ח  
פרופ' יובל רויכמן

**חלק א':** (50%) ענה על 2 מתוך 3 השאלות הבאות.

1. הוכח : לחבורת  $p$  יש מרכז לא טריויאלי.
2. הוכח : סדר מחלקת צמידות בחבורה  $G$  מחלק את סדר החבורה  $G$ .
3. הוכח : מכפלה פנימית ישרה  $A \otimes B$  איזומורפית למכפלה חיצונית ישרה  $A \times B$ .

**חלק ב':** (50%) ענה על 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

4. (א.) תן דוגמה לחבורה אבלית לא ציקלית. הוכח שאינה ציקלית.
- (ב.) תן דוגמה לחבורה אבלית שאינה נוצרת ע"י תת-קבוצה סופית. הוכח שאינה נוצרת סופית.
5. נניח שקיים אפימורפיזם מ-  $A_6$  לחבורה  $G$ . מצא את  $G$  (מיין את האפשרויות עד כדי איזומורפיזם).

6. הוכח או הפרך: כל חבורה מסדר :

(א) 22 (ב) 60 (ג) 250

היא חבורה פתירה.

7. הוכח או הפרך : אין חבורה פשוטה מסדר : (א) 76 (ב) 360 .

בהצלחה !

מבחן באלגברה מופשטת 1  
(תורת החבורות)

מועד א' תשע"א  
פרופ' יובל רויכמן

**חלק א':** (50%) ענה על 2 מתוך 3 השאלות הבאות.

1. הוכח : מכפלה פנימית ישרה  $A \otimes B$  איזומורפית למכפלה חיצונית ישרה  $A \times B$ .
2. יהי  $p$  מספר ראשוני ותהי  $G$  חבורה שסדרה מתחלק ע"י  $p$ . הוכח : ב-  $G$  יש אבר שסדרו  $p$ .
3. מצא את תת-חבורת הקומוטטור של החבורה הסימטרית  $S_n$ . הוכח תשובתך.

**חלק ב':** (50%) ענה על 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

4. הוכח: החבורה הליניארית הכללית  $GL_n(\mathbb{Q})$  אינה חבורה פשוטה.
5. מצא את כל החבורות האבליות שיש להן ארבע מחלקות צמידות.
6. הוכח או הפרך. כל חבורה מסדר :  
(א) 26 (ב) 27 (ג) 28  
היא פתירה.

7. תהי  $G$  חבורה מסדר 9 הפועלת על קבוצה  $X$  מסדר 4. האם יש נקודות שבת? הוכח או הפרך.

בהצלחה !

מבחן באלגברה מופשטת 1  
(תורת החבורות)

מועד ב' תשע"א  
פרופ' יובל רויכמן

**חלק א':** (50%) ענה על 2 מתוך 3 השאלות הבאות.

1. הוכח : לכל חבורה סופית ולכל  $p$  ראשוני המחלק את סדר החבורה קיימת תת-חבורה  $p$  סילוא.
2. תהי  $G$  חבורה סופית הפועלת על קבוצה  $X$ . הוכח : סדר כל מסלול ב-  $X$  מחלק את סדר החבורה  $G$ .
3. הוכח : העתקת הסימן מהחבורה הסימטרית  $S_n$  ל-  $Z_2$  היא הומומורפיזם.

**חלק ב':** (50%) ענה על 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

4. הוכח או הפרך: חבורת התמורות  $S_n$  נוצרת ע"י שני אברים .
5. חשב את כל סדרות ההרכב של החבורה הדיהדרלית  $D_3$  .
6. נתון הומומורפיזם  $\varphi: G \rightarrow H$  .  
הוכח או הפרך:  $\text{Im } \varphi$  תת-חבורה נורמלית ב  $H$  .
7. (א) האם קיים אפימורפיזם  $Z \rightarrow Z_{10} \times Z_{33} \times Z_7$  ? הוכח תשובתך.  
(ב) האם קיים מונומורפיזם  $Z_{10} \rightarrow S_{10}$  ? הוכח.  
(ג) האם קיים מונומורפיזם  $Z_{10} \rightarrow A_{10}$  ? הוכח.

בהצלחה !

מבחן באלגברה מופשטת 1  
(תורת החבורות)

מועד ג' תשע"א  
פרופ' יובל רויכמן

**חלק א' (50%)** ענה על 2 מתוך 3 השאלות הבאות.

1. יהיו  $q > p$  מספרים ראשוניים כך ש  $q \not\equiv 1 \pmod p$ . הוכח: חבורה מסדר  $pq$  היא ציקלית.
2. יהי  $p$  מספר ראשוני ותהי  $G$  חבורה אבלית שסדרה מתחלק ע"י  $p$ . הוכח: ב-  $G$  יש אבר שסדרו  $p$ .
3. הוכח: סדר מחלקת צמידות בחבורה סופית מחלק את סדר החבורה.

**חלק ב' (50%)** ענה על 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

4. תן דוגמה לחבורה אבלית שאינה נוצרת ע"י תת-קבוצה סופית. הוכח שאינה נוצרת סופית.
5. הוכח או הפרך: אין חבורה פשוטה מסדר: א) 38 ב) 60.
6. הוכח או הפרך. כל חבורה מסדר:
  - א) 119 ב) 120 ג) 121
 היא חבורה אבלית.
7. הוכח: חבורת התמורות הזוגיות על 4 אותיות  $A_4$  אינה פשוטה.

בהצלחה!

מבחן באלגברה מופשטת 1  
(תורת החבורות)

מועד א' תשס"ט  
פרופ' יובל רויכמן

**חלק א'** (50%) ענה על 2 מתוך 3 השאלות הבאות.

1. הוכח : העתקת הסימן מהחבורה הסימטרית  $S_n$  ל-  $Z_2$  היא הומומורפיזם.

2. יהי  $p$  מספר ראשוני ותהי  $G$  חבורה שסדרה מתחלק ע"י  $p$ .  
הוכח : ב-  $G$  יש אבר שסדרו  $p$ .

3. תהי  $G$  חבורה סופית הפועלת על קבוצה  $X$ . הוכח : סדר כל מסלול ב-  $X$  מחלק את סדר החבורה  $G$ .

**חלק ב'** (50%) ענה על 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

4. הוכח כי חבורת התמורות  $S_n$  נוצרת ע"י שני אברים.

5. מצא את כל החבורות הסופיות להן שתי מחלקות צמידות.

6. הוכח או הפרך. כל חבורה מסדר :

(א) 26 (ב) 25 (ג) 20

היא פתירה.

7. יהי  $p$  מספר ראשוני. הוכח : כל חבורה מסדר  $p$  היא אבלית.

בהצלחה !

מבחן באלגברה מופשטת 1  
(תורת החבורות)

מועד ב' תשס"ט  
פרופ' יובל רויכמן

**חלק א'.** (50%) ענה על 2 מתוך 3 השאלות הבאות.

1. הוכח : לכל חבורה סופית ולכל  $p$  ראשוני המחלק את סדר החבורה קיימת תת-חבורה  $p$  סילוא.

2. הוכח : חבורת  $p$  היא חבורה פתירה.

3. הוכח : מכפלה פנימית ישרה  $A \otimes B$  איזומורפית למכפלה חיצונית ישרה  $A \times B$ .

**חלק ב'.** (50%) ענה על 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

4. הוכח : תת-חבורה מאינדקס 2 היא ת"ח נורמלית.

5. הוכח או הפרך: יש חבורה פשוטה מסדר

(א) 49 (ב) 40.

6. הוכח או הפרך : החבורה הכפלית של הרציונליים  $\mathbb{Q}^*$  אינה נוצרת סופית.

7. נניח שקיים אפימורפיזם מ-  $S_5$  לחבורה  $G$ . מצא את  $G$  (מיין את האפשרויות עד כדי איזומורפיזם).

בהצלחה !



## מבחן בתורת החבורות

מועד א' תשס"ו

**חלק א' (50%) ענה על 2 מתוך 3 השאלות הבאות.**

1. הוכח : חבורה אבלית סופית איזומורפית למכפלה ישרה של תתי-חבורות שסדרן חזקת ראשוני.

2. יהי  $p$  מספר ראשוני ותהי  $G$  חבורה אבלית שסדרה מתחלק ע"י  $p$ . הוכח : ב- $G$  יש אבר שסדרו  $p$ .

3. יהי  $p$  מספר ראשוני ותהי  $G$  חבורה שסדרה  $2p$ . הוכח :  $G$  ציקלית או דיהדרלית.

**חלק ב' (50%) ענה על 3 מתוך 4 השאלות הבאות.**

4. מניין את החבורות האבליות מסדר 48 ומעריך (=אקספוננט) 12 (עד כדי איזומורפיזם).  
(כלומר : מנה אותן, הראה שאין אחרות, ושהחבורות שמנית אינן איזומורפיות זו לזו).

5. מניין את החבורות מסדר 15 (עד כדי איזומורפיזם).

6. הוכח או הפרך: כל חבורה מסדר :

(א) 62 (ב) 61 (ג) 60, היא חבורה פתירה.

7. א). תן דוגמה לחבורה אבלית לא ציקלית. הוכח שאינה ציקלית.  
ב). תן דוגמה לחבורה אבלית שאינה נוצרת ע"י תת-קבוצה סופית. הוכח שאינה נוצרת סופית.

בהצלחה !

## מבחן בתורת החבורות

מועד ב' תשס"ו

**חלק א' (50%) ענה על 2 מתוך 3 השאלות הבאות.**

1. הוכח : לכל חבורה סופית ולכל  $p$  ראשוני המחלק את סדר החבורה קיימת תת-חבורה  $p$  סילווא.
2. תהי  $G$  חבורה אבלית סופית עם מעריך (=אקספוננט)  $p$ . הוכח :  $G$  איזומורפית למכפלה ישרה של חבורות ציקליות.
3. תהי  $G$  חבורה סופית. הוכח : סדר מחלקת צמידות ב-  $G$  מחלק את סדר החבורה  $G$ .

**חלק ב' (50%) ענה על 3 מתוך 4 השאלות הבאות.**

4. מיין את החבורות מסדר 6 (עד כדי איזומורפיזם).  
(כלומר : מנה אותן, הראה שאין אחרות, ושהחבורות שמנית אינן איזומורפיות זו לזו) .
5. מיין את החבורות מסדר 49 (עד כדי איזומורפיזם) .
6. א) . האם לחבורה מסדר 25 יש תת-חבורה נורמלית לא טריוויאלית ?  
ב) . האם לחבורה מסדר 26 יש תת-חבורה נורמלית לא טריוויאלית ?  
ג) . האם לחבורה מסדר 27 יש תת-חבורה נורמלית לא טריוויאלית ?  
הוכח ! (שים לב : 3 תשובות אפשריות : יש, אין, לעתים יש)
7. נניח שקיים אפימורפיזם מ-  $D_3$  ל-  $G$  . מצא את  $G$  (מיין את האפשרויות עד כדי איזומורפיזם) .

בהצלחה !

מבחן באלגברה מופשטת 1 (תורת החבורות)

מועד ג' תשס"ו

**חלק א':** (50%) ענה על 2 מתוך 4 השאלות הבאות.

1. הוכח : העתקת הסימן מהחבורה הסימטרית  $S_n$  ל-  $Z_2$  היא אפימורפיזם.
2. יהי  $p$  מספר ראשוני ותהי  $G$  חבורה שסדרה חזקה של  $p$ .  
הוכח : ל-  $G$  יש מרכז לא טריויאלי.
3. יהי  $p$  מספר ראשוני ותהי  $G$  חבורה שסדרה  $2p$ . הוכח :  $G$  ציקלית או דיהדרלית.

**חלק ב':** (50%) ענה על 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

4. מיינ את החבורות האבליות מסדר 180.  
(כלומר : מנה אותן, הראה שאין אחרות, ושהחבורות שמנית אינן איזומורפיות זו לזו).
5. מיינ (עד כדי איזומורפיזם) את כל החבורות מהסדרים בבאים :  
(א) 25. (ב) 35. (ג) 26.
6. (1) הוכח או הפרך: לא קיימת חבורה פשוטה מסדר 22.  
(2) הוכח: לא קיימת חבורה פשוטה מסדר 28.
7. יהי  $p$  מספר ראשוני. הוכח: כל חבורה מסדר  $p$  היא אבלית.

בהצלחה !

**מבחן באלגברה מופשטת – I**  
(תורת החבורות)

פרופ' יובל דויכמן

מועד א' תשס"ז

**חלק א' (50%) ענה על 2 מתוך 3 השאלות הבאות.**

1. הוכח : מספר חבורות  $p$  סילוא של חבורה סופית  $G$  מחלק את סדר  $G$ .
2. יהי  $p$  מספר ראשוני ותהי  $G$  חבורה אבלית שסדרה מתחלק ע"י  $p$ .  
הוכח : ב-  $G$  יש אבר שסדרו  $p$ .
3. תהי  $G$  חבורה, ו- $A, B$  תתי-חבורות נורמליות שלה שחיתוכן אבר היחידה.  
הוכח:

$$A \otimes B \cong A \times B$$

**חלק ב' (50%) ענה על 3 מתוך 4 השאלות הבאות.**

4. החבורה  $S_4$  פועלת על פולינומים ב-4 משתנים באופן הבא:  

$$g(f(x_1, \dots, x_4)) = f(x_{g(1)}, \dots, x_{g(4)})$$
 מצא את סדר המסלול ואת סדר המייצב של  $x_1 x_2$ .
5. מניין את החבורות מסדר 121 (עד כדי איזומורפיזם).  
(כלומר : מנה אותן, הראה שאין אחרות, ושהחבורות שמנית אינן איזומורפיות זו לזו).
6. הוכח או הפרך: כל החבורות מהסדר הבא הן חבורות פשוטות.  
 (א) 6 (ב) 7 (ג) 8.
7. הוכח או הפרך: (א)  $S_4$  חבורה פתירה. (ב)  $S_6$  חבורה פתירה.

בהצלחה !

מבחן באלגברה מופשטת – I  
(תורת החבורות)

פרופ' יובל דויכמן

מועד ב' תשס"ז

**חלק א'.** (50%) ענה על 2 מתוך 3 השאלות הבאות.

1. תהי  $G$  חבורה סופית. הוכח : סדר מחלקת צמידות ב-  $G$  מחלק את סדר החבורה  $G$ .

2. (א) הוכח : העתקת הסימן היא אפימורפיזם מ-  $S_n$  על  $Z_2$ .  
(ב) הסק :  $A_n$  תת-חבורה נורמלית של  $S_n$ .

3. יהי  $p$  מספר ראשוני ותהי  $G$  חבורה שסדרה  $2p$ . הוכח :  $G$  ציקלית או דיהדרלית.

**חלק ב'.** (50%) ענה על 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

4. מיינ את החבורות מהסדרים הבאים עד כדי איזומורפיזם : (א) 14 (ב) 15.  
(כלומר : מנה אותן, הראה שאין אחרות, ושהחבורות שמנית אינן איזומורפיות זו לזו).

5. מצא את כל סדרות ההרכב של  $Z_{35}$ .

6. הוכח : לחבורת המנה  $Q/Z$  אין תת-חבורה איזומורפית ל-  $Z$ .

7. הוכח או הפרך: לא קיימת חבורה פשוטה מסדר 28.

בהצלחה !