

בוחר מונים אלגבריים

25 באוקטובר 2015

1. תזכורת: הקבוצה $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ מהווה חבורה לכל $n \in \mathbb{N}$ ביחס לפעולה "חיבור מודולו n ". נגדיר קבוצה חדשה

$$U_n = \{x \in \mathbb{Z}_n \mid \exists y \in \mathbb{Z}_n : xy = 1 \pmod{n}\}$$

(א) בכיתה הגדרנו מהי חבורה. צטט את ההגדרה.

(ב) הוכח כי U_n חבורה ביחס לפעולה "כפל מודולו n " (למשל דוגמא לכפל מודולו 5 היא $2 \cdot 4 = 3 \pmod{5}$).

(ג) יהא $x \in \mathbb{Z}_n$. הוכח כי אם מתקיים ש

$$\exists y \in \mathbb{Z}_n : xy = 0$$

אז $x \notin U_n$

(ד) מצא את הקבוצה U_8

(ה) עבור $3 \in U_8$ נסמן ב H את התת חבורה הנוצרת ע"י 3 כלומר $H = \langle 3 \rangle \leq U_8$. מצא את H מפורשות.

(ו) מתקיים כי H (מהסעיף הקודם) היא תת קבוצה של \mathbb{Z}_n . כלומר $H \subseteq \mathbb{Z}_n$. האם H היא תת חבורה של החבורה \mathbb{Z}_8 ? נמק תשובתך.

(ז) מצא את המרכז של U_8 כלומר מצא את $C(U_8)$.

2. תזכורת S_n היא חבורת התמורות ביחס לפעולת ההרכבה. נסמן

$$\sigma = (3, 5)(18, 4, 6)(7, 11, 2, 13)(8, 9, 12, 20)(15, 1, 16, 17, 10) \in S_{20}$$

כאשר σ היא בצורה של מכפלה של מחזורים זרים.

(א) נגדיר $\tau = \sigma(1, 2)\sigma^{-1}$. מצא את ההצגה של מחזורים זרים של τ (אפשר להיעזר ב.ש.ב. בתרגיל שאומר ש $(\sigma(i_1, i_2, \dots, i_m))\sigma^{-1} = \dots$

(ב) מצא את ההצגה של מחזורים זרים של σ^{20} (רמז: מה אתם יודעים על חילופים זרים..)

(ג) מצא את הסדר של σ

(ד) נסמן ב H את התת חבורה הנוצרת ע"י σ כלומר $H = \langle \sigma \rangle \leq S_{20}$. ענה כן או לא (ללא נימוק) - האם H תת חבורה ציקלית?

.3

(א) הוכח או הפרך: לכל חבורה ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $H = \{g^n \mid g \in G\}$ היא תת חבורה של G

(ב) יהיו G_1, G_2 חבורות. הגדרנו את החבורה $G_1 \times G_2$. הוכח או הפרך: לכל G_1, G_2 חבורות מתקיים כי G_2, G_1 חבורות ציקליות אמ"מ $G_1 \times G_2$ חבורה ציקלית.

(ג) הוכח או הפרך: יהא M מונואיד סופי (כלומר מונואיד עם מספר סופי של איברים). נסמן האיבר הנטרלי שלו ב e . נתון כי

$$\forall x \in M \exists y \in M : xy = e$$

האם בהכרח M חבורה?

4. יהיו G_1, G_2 חבורות. אילו תכונות צריכה לקיים הפונקציה $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ על מנת ש $G_1 \simeq G_2$ (כלומר ש G_1 איזומורפי ל G_2)? - אני רוצה לוותר על סעיף זה ובמקומו:

עבור התחומים והטווחים הבאים A, B קבע האם הפונקציה $f : A \rightarrow B$ יכולה להיות חח"ע על או איזומורפיזם:

(א) כ $A = \mathbb{Z}_4$ $B = \mathbb{Z}_{10}$

(b) $A = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ $B = \mathbb{Z}_4$

(c) $A = S_2$ $B = \mathbb{Z}_2$

(d) $A = \mathbb{Q}$ $B = \mathbb{Q}$

(e) $A = S_3$ $B = \mathbb{Z}_3$