1. הגובה של הרי געש מתפלג אקספוננציאלית כ- $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

א. מה ההסתברות שמבין m הרי געש שנבחרו באקראי יהיו בדיוק n שגובהם מעל λ?

ב. בוחרים שני הרי געש אקראיים (בלתי תלויים). מה ההסתברות שהאחד גבוה לפחות פי שניים מהשני?

ג. מטפסת ההרים הנועזת עדה פיסגה מטפסת בכל יום על הר אחר עד שהיא מוצאת הר שגובהו מעל λ. עלות הטיפוס על כל הר היא S שקלים, אך כאשר תכבוש לבסוף הר שגובהו λ (ומעלה) תזכה בפרס כספי נאה. מה צריך להיות ערך הפרס על מנת להבטיח כי תוחלת הרווח של עדה תהיה חיובית?

ד. נתון כי עדה כבר טיפסה על שני הרים שהתבררו כנמוכים מידי. מהי תוחלת הרווח שלה כעת?

א

$$p = P(X > \lambda) = 1 - P(X \le \lambda) = 1 - F_X(\lambda) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda^2}\right) = e^{-\lambda^2} = p$$

$$Y \sim Bin\left(m, p = e^{-\lambda^2}\right)$$

$$P(Y = n) = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}$$

ב

$$\begin{aligned} P(X_2 < 0.5X_1) &= \int_0^\infty P(X_2 < 0.5X_1 | X_1 = t) f_{X_1}(t)dt \\ &= \int_0^\infty P(X_2 < 0.5t | X_1 = t) f_{X_1}(t)dt \overset{\text{ב"ת}}{=} \int_0^\infty P(X_2 < 0.5t) f_{X_1}(t)dt = \int_0^\infty F_{X_2}(0.5t) f_{X_1}(t)dt \\ &= \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda 0.5t}\right)\lambda e^{-\lambda t}dt = \underbrace{\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}dt}_{\int f(t)dt = 1} - \int_0^\infty \lambda e^{-1.5\lambda t}dt = 1 - \frac{1}{1.5}\underbrace{\int_0^\infty 1.5\lambda e^{-1.5\lambda t}dt}_{1} \\ &= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \approx 0.3334 \end{aligned}$$

ג

$$T \sim Geo(p = e^{-\lambda^2})$$

$$E[T] = \frac{1}{p} = \frac{1}{e^{-\lambda^2}} = e^{\lambda^2}$$

$$\begin{aligned} E[Proffit] &= E[Reward - Expanses] = E[Reward - T \cdot S] = Reward - E[T] \cdot S \\ &= Reward - e^{\lambda^2} \cdot S > 0 \end{aligned}$$

$$Reward > e^{\lambda^2} \cdot S$$

ד

בגלל תכונת חוסר הזיכרון, התוחלת בהינתן הידיעה שטיפסנו כמות מסויימת של הרים שווה לתוחלת בלי הידיעה הזאת, לכן תוחלת כמות הטיפוסים שנשארו שארת זהה, לכן תוחלת הרווח היא מה שקיבלנו קודם פחות ההוצאות על 2 הטיפוסים שכבר בוצעו

$$E[Proffit] = Reward - (e^{\lambda^2} + 2) \cdot S$$

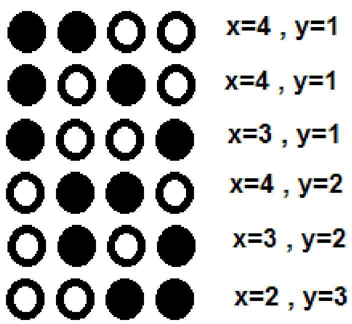
2. מערבבים שני מוצרים תקינים עם שני מוצרים פגומים ובוחרים מוצרים (באקראי) בזה אחר זה, ללא החזרה. נגדיר את המשתנים המקריים: X מספר הנסיונות עד להוצאת שני מוצרים תקינים; Y מספר הנסיונות עד להוצאת המוצר הפגום הראשון.

א. בנו לוח התפלגות משותפת של X ו-Y.

ב. האם X ו-Y הם בלתי תלויים? האם הם בלתי מתואמים? הוכיחו.

ג. חשבו את מקדם המתאם בין X ו-Y.

ד. מהי התוחלת של XY^2?



	X=2	X=3	X=4	$P_Y(y)$
Y=1	0	1/6	2/6	3/6
Y=2	0	1/6	1/6	2/6
Y=3	1/6	0	0	1/6
$P_X(x)$	1/6	2/6	3/6	1

Y,X תלויים כי $0 = P_{XY}(2,1) \neq P_X(2) \cdot P_Y(1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6}$

$$E[X] = \sum_{x=2}^{4} x \cdot P_X(x) = 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{2}{6} + 4 \cdot \frac{3}{6} = \frac{2+6+12}{6} = 3\frac{1}{3}$$

$$E[Y] = \sum_{y=1}^{3} y \cdot P_Y(y) = 1 \cdot \frac{3}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3+4+3}{6} = 1\frac{2}{3}$$

$$E[XY] = \sum_{x=2}^{4}\sum_{y=1}^{3} xy \cdot P_{XY}(x,y) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot 1 \cdot \frac{2}{6} + 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6}$$
$$= \frac{6+3+6+8+8}{6} = 5\frac{1}{6}$$

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = \frac{31}{6} - \frac{10}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{93}{18} - \frac{50}{9} = \frac{93}{18} - \frac{100}{18} = -\frac{7}{18}$$

Y,X מתואמים כי $Cov(X,Y) \neq 0$

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V[X]} \cdot \sqrt{V[Y]}} = \cdots$$

$$E[X \cdot Y^2] = \sum_{x=2}^{4}\sum_{y=1}^{3} x \cdot y^2 \cdot P_{XY}(x,y) = \cdots$$

3. משתנה מקרי רציף $X \sim U(0,1)$ נגזר מתוך צפיפות אחידה.
א. בנו את הפונקציה יוצרת המומנטים של X, $M_X(t)$.
ב. השתמשו ב- $M_X(t)$ על מנת לחשב את התוחלת $E(X)$ והשונות $Var(X)$ של X.
ג. מהי פונקציית הצפיפות של המשתנה המקרי $Y = e^{tX}$ (השתמשו ב-t כפרמטר).
ד. מהי פונקציית ההצטברות $F_Y(b)$ של Y?

$$M_X(t) = E[e^{tx}] = \int_0^1 e^{tx} \cdot \frac{1}{1-0} \cdot dx = \int_0^1 e^{tx} dx \overset{t \neq 0}{\cong} \frac{[e^{tx}]_0^1}{t} = \frac{e^t - 1}{t}$$

$$* \, (t = 0) \rightarrow \; M_X(t) = \int_0^1 e^{0x} dx = \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

$$M_X(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} & for \;\; t \neq 0 \\ 1 & for \;\; t = 0 \end{cases}$$

$$E[X] = M'_X(t)|_{t=0} = \frac{e^t t - 1(e^t - 1)}{t^2}|_{t=0} \overset{t=0.001}{\approx} 0.500$$

$$E[X^2] = M''_X(t)|_{t=0} = \cdots$$

$$V[X] = E[X^2] - E^2[X] = \cdots$$

$$0 < X < 1$$

$$e^{0t} < e^{tX} < e^t$$

$$1 < Y < e^t$$

$$F_Y(b) = P(Y \leq b) = P(e^{tX} \leq b) = P(tX \leq \ln b) = P\left(X \leq \frac{\ln b}{t}\right) = F_X\left(\frac{\ln b}{t}\right) = \frac{\frac{\ln b}{t} - 0}{1 - 0} = \frac{\ln b}{t}$$

$$F_Y(b) = \begin{cases} 0 & for \quad b \leq 1 \\ \dfrac{\ln b}{t} & for \;\; 1 < b < e^t \\ 1 & for \quad e^t \leq b \end{cases}$$

$$f_Y(b) = F'_Y(b) = \frac{1}{tb}$$

$$f_Y(b) = \begin{cases} \frac{1}{tb} & for \quad 1 < b < e^t \\ 0 & for \quad Otherwize \end{cases}$$

4. שתי קוביות מונחות בקופסה, האחת X הוגנת, דהיינו $X \sim U(1,6)$; והשנייה Y מוטה, כך ש-

$$P(Y=a)=\frac{a}{C}$$

עבור $a=1,2,\ldots,6$.

א. חשבו את הקבוע C.

ב. מוציאים באקראי קובייה מהקופסה, מטילים אותה ומקבלית שש. מה ההסתברות שהיא הוגנת?

ג. מהי התוחלת והשונות של X ו-Y? העזרו בזהויות $\sum_{a=1}^{N} a^2=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$ ו- $\sum_{a=1}^{N} a^3=\frac{(N(N+1))^2}{4}$.

ד. מטילים כל קובייה עשר פעמים ומחשבים את הממוצע על כל התוצאות

$$\bar{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i$$

$$\bar{Y}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} Y_i$$

מהי ההתפלגות של המשתנים המקריים $\bar{X}$ ו-$\bar{Y}$?

ה. עבור אחת הקוביות חושב הממוצע הנ"ל והתוצאה שהתקבלה הייתה שש. מה ההסתברות שהקובייה הוגנת?

פתרון:

א. את הקבוע C נחשה מתוך תנאי הנרמול:

$$\sum_{a=1}^{6} P(Y=a)=1 \Rightarrow \frac{1}{C}\sum_{a=1}^{6} a=1 \Rightarrow \boldsymbol{C=21}$$

ב. נגדיר משתנה מקרי $F \sim b\left(\frac{1}{2}\right)$ המקיים $F=0$ אם הקוביה שנשלפה באקראי לא הוגנת, ו-$F=1$ אם היא הוגנת. המשתנה המקרי Z מייצג את תוצאת ההטלה של הקוביה האקראית (במקרה הנתון התקבל $Z=6$). על פי נוסחת בייס נרשום:

$$P(F=1|Z=6)=\frac{P(Z=6|F=1)P(F=1)}{P(Z=6)}$$

כעת עבור קוביה הוגנת נקבל ש- $P(Z=6|F=1)=\frac{1}{6}$, וכן ש- $P(F=1)=\frac{1}{2}$. את המכנה נקבל מתוך נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(Z=6)=P(Z=6|F=0)P(F=0)+P(Z=6|F=1)P(F=1)=\frac{6}{21}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{19}{84}$$

כעת נציב בנוסחת בייס ונקבל:

$$P(F=1|Z=6)=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}}{\frac{19}{84}}=\boldsymbol{\frac{7}{19}}\approx \mathbf{0.368}$$

ג. תוחלת:

$$E(X)=\sum_{a=1}^{6} aP(X=a)=\frac{1}{6}\sum_{a=1}^{6} a=\boldsymbol{\frac{7}{2}}=\mathbf{3.5}$$

$$E(Y)=\sum_{a=1}^{6} aP(Y=a)=\frac{1}{21}\sum_{a=1}^{6} a^2=\frac{1}{21}\times\frac{6\times(6+1)\times(12+1)}{6}=\boldsymbol{\frac{13}{3}}\approx\mathbf{4.333}$$

שונות:

$$E(X^2)=\sum_{a=1}^{6} a^2P(X=a)=\frac{1}{6}\sum_{a=1}^{6} a^2=\frac{91}{6}$$

$$Var(X)=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{35}{12}}\approx\mathbf{2.91667}$$

$$E(Y^2)=\sum_{a=1}^{6} a^2P(Y=a)=\frac{1}{21}\sum_{a=1}^{6} a^3=\frac{1}{21}\times\frac{(6\times(6+1))^2}{4}=21$$

$$Var(Y)=21-\left(\frac{13}{3}\right)^2=\boldsymbol{\frac{20}{9}}\approx\mathbf{2.222}$$

ד. על פי משפט הגבול המרכזי נקבל ש- $\bar{X}\sim N\left(\mu=E(X),\sigma^2=\frac{Var(X)}{10}\right)$, דהיינו: $\boldsymbol{X\sim N\left(\frac{7}{2},\frac{7}{24}\right)}$

באופן דומה: $\boldsymbol{Y\sim N\left(\frac{13}{3},\frac{2}{9}\right)}$

ה. בשביל שהממוצע יהיה שש דרושות עשר הטלות שבכולן התקבל $Z=6$. חזרה על החישוב מסעיף ב תיתן:

$$P(F=1|Z=(6,6,\ldots,6))=\frac{P(Z=(6,6,\ldots,6)|F=1)P(F=1)}{P(Z=(6,6,\ldots,6))}$$

כעת $P(Z=(6,6,\ldots,6)|F=1)=\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$, ואילו

$$P(Z=(6,6,\ldots,6))=\left(\frac{6}{21}\right)^{10}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\times\frac{1}{2}\approx 1.8\times10^{-6}$$

ומכאן ש-

$$(F=1|Z=(6,6,\ldots,6)=\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^{10}}{\left(\frac{6}{21}\right)^{10}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\times\frac{1}{2}}\approx\mathbf{0.009}$$

הסתברות נמוכה מאחוז.

שאלת בונוס – לא חובה (בונוס 10 נקודות)

5. במדידה של משתנה מקרי כלשהו X נצפו באופן בלתי תלוי הערכים $\{X_1, \dots, X_n\}$.

א. הראו ש-

$$T(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

הינו אומד חסר הטיה עבור התוחלת $E(X)$. מה התנאי עבור המקדמים a_i?

ב. מבין האומדנים $T_1(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{2}(X_1 + X_{12})$ ו- $T_2(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2$ מיהו האומד העדיף (הוכיחו)?

פתרון:

א. נחשב את התוחלת של $T(X_1, \dots, X_n)$:

$$E(T) = E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) = E(X)\sum_{i=1}^{n} a_i$$

כאשר במעבר השני התבססנו על לינאריות התוחלת. כעת $E(T)$ יהיה אומד חסר הטיה עבור $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

ב. נחשב את השונות של כל אחד מן האומדנים:

$$Var(T_1) = Var\left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_{12}\right) = \frac{1}{4}Var(X) + \frac{1}{4}Var(X) = \frac{1}{2}Var(X)$$

כאשר התבססנו על האי-תלות של כל ה- X_i על מנת לסכום כראוי את השונויות ($Cov(X_i, X_j) = 0; i \neq j$).

באופן דומה:

$$Var(T_2) = \frac{1}{9}Var(X) + \frac{4}{9}Var(X) = \frac{5}{9}Var(X)$$

לפיכך $Var(T_1) < Var(T_2)$ ואם כן, T_1 הוא האומד העדיף.