נכתב על ידי יהונתן רגב

טופולוגיה של $\mathbb{R}^n$

סימון

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

נסמן:

$$E^c \quad := \quad \mathbb{R}^n \backslash E$$

הגדרה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

נקודה $x \in \mathbb{R}^n$ נקראת **נקודה פנימית** של E, אם קיים כדור פתוח שמרכזו x המוכל ב - E.

נקודה $x \in \mathbb{R}^n$ נקראת **נקודה חיצונית** של E, אם קיים כדור פתוח שמרכזו x המוכל ב - E^c.

נקודה $x \in \mathbb{R}^n$ נקראת **נקודת שפה** של E, אם x אינה נקודה פנימית של E ואינה נקודה חיצונית של E.

אוסף נקודות השפה של E נקרא **השפה** של E, ומסומן: ∂E.

נקודה $x \in E$ נקראת **נקודה מבודדת** של E, אם קיים כדור פתוח שמרכזו x שאינו מכיל נקודה ב-E פרט לנקודה x.

נקודה $x \in \mathbb{R}^n$ נקראת **נקודה גבולית** של E אם בכל כדור פתוח שמרכזו x קיימת נקודה ב - E השונה מהנקודה - x.

אוסף הנקודות הגבוליות של E מסומן: E'.

דוגמה

1. תהי:

$$E \quad = \quad [0,1)$$

כאן:

$$\partial E \quad = \quad \{0,1\}$$

2. תהי:

$$E \quad = \quad [0,1) \cup \{2\}$$

כאן:

$$\partial E \quad = \quad \{0,1,2\}$$

3. נקודת שפה היא נקודה מבודדת או נקודה גבולית.
4. נקודה גבולית היא לא בהכרח נקודת שפה.
5. נקודה גבולית שאינה שייכת ל $E -$ היא נקודת שפה.
6. תהי:

$$E \quad \subseteq \quad \mathbb{R}^n$$

מתקיים:

$$E' \cup E \quad = \quad E \cup \partial E$$

הגדרה

קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת **פתוחה** אם כל הנקודות בה הן נקודות פנימיות.

הערה

עפ"י ההגדרה, הקבוצות $\mathbb{R}^n, \emptyset$ פתוחות.

משפט

1. איחוד של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.
2. חיתוך סופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

הוכחה

1. יהיו:

$$\{G_\alpha\}_{\alpha \in I} \quad \subseteq \quad \mathbb{R}^n$$

קבוצות פתוחות.
תהי:

$$G \quad := \quad \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$$

נוכיח כי G פתוחה.
יהי:

$$x \quad \in \quad G$$

עפ"י הגדרת G, קיים $\alpha_0 \in I$ כך ש:

$$x \in G_{\alpha_0}$$

G_{α_0} פתוחה, לכן, קיים $0 < r$ כך ש:

$$B(x,r) \subseteq G_{\alpha_0}$$

עפ"י הגדרת G:

$$B(x,r) \subseteq G$$

לכן, G פתוחה.

■

2. יהיו:

$$\{G_i\}_{i=1}^{k} \subseteq \mathbb{R}^n$$

קבוצות פתוחות.
תהי:

$$G := \bigcap_{i=1}^{k} G_i$$

נוכיח כי G פתוחה.
יהי:

$$x \in G$$

עפ"י הגדרת G, לכל $1 \le i \le k$:

$$x \in G_i$$

לכל $1 \le i \le k$, G_i פתוחה, לכן קיים $0 < r_i$, כך ש:

$$B(x,r_i) \subseteq G_i$$

נגדיר:

$$r := \min_{1 \le i \le k} r_i$$

לכן, לכל $1 \le i \le k$:

$$B(x,r) \subseteq G_i$$

עפ"י הגדרת G:

$$B(x,r) \subseteq G$$

לכן, G פתוחה.

■

דוגמה

חיתוך אינסופי של קבוצות פתוחות אינו בהכרח קבוצה פתוחה.

לכל $k \in \mathbb{N}$, נגדיר:

$$G_k := \left(0,1+\frac{1}{k}\right)$$

נגדיר:

$$\begin{aligned} G &:= \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \\ &= (0,1] \end{aligned}$$

לכל $k \in \mathbb{N}$, G_k פתוחה.

אולם, G אינה פתוחה.

■

הגדרה

תהי $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^n$.

קבוצת הנקודות הפנימיות של E נקראת **הפנים** של E, ומסומנת: $\mathcal{J}nt(E)$.

משפט

תהי $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^n$.

הקבוצה $\mathcal{J}nt(E)$ פתוחה.

הוכחה

יהי:

$$x \in \mathcal{I}nt(E)$$

לכן, קיים $0 < r$ כך ש:

$$B(x,r) \subseteq E$$

יהי:

$$y \in B(x,r)$$

$B(x,r)$ פתוחה, לכן קיים $0 < \rho$ כך ש:

$$B(y,\rho) \subseteq B(x,r)$$

לכן:

$$B(y,\rho) \subseteq E$$

לכן:

$$y \in \mathcal{I}nt(E)$$

לכן:

$$B(x,r) \subseteq \mathcal{I}nt(E)$$

לכן, $\mathcal{I}nt(E)$ פתוחה.

■

הגדרה

תהי $x \in \mathbb{R}^n$.

סביבה של הנקודה x היא קבוצה פתוחה המכילה את x.

הגדרה

קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת **סגורה** אם E^c פתוחה.

משפט

1. חיתוך של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.
2. איחוד סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.

הוכחה

הוכחת המשפט נובעת מהמשפט הקודם ומכללי דה-מורגן :

$$\left(\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} F_\alpha^c$$
$$\left(\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{k} F_i^c$$

דוגמה

איחוד אינסופי של קבוצות סגורות אינו בהכרח קבוצה סגורה.

לכל $n\in\mathbb{N}$, נגדיר :

$$F_n := \left[0,1-\frac{1}{n}\right]$$

נגדיר :

$$\begin{aligned} F &:= \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \\ &= [0,1) \end{aligned}$$

לכל $n\in\mathbb{N}$, F_n סגורה.

אולם, F אינה סגורה.

■

משפט

קבוצה $F\subseteq\mathbb{R}^n$ היא סגורה אם ורק אם היא מכילה את כל הנקודות הגבוליות שלה.

הוכחה

$\boxed{\Leftarrow}$

נניח כי F סגורה.

תהי $x_0 \in \mathbb{R}^n$ נקודה גבולית של F.

נניח בשלילה כי:

$$x_0 \in F^c$$

F סגורה, לכן F^c פתוחה, לכן קיים $0 < r$ כך ש:

$$B(x_0, r) \subseteq F^c$$

x_0 גבולית, לכן קיימת נקודה $x \in B(x_0, r)$ כך ש:

$$x \in F$$

לכן:

$$B(x_0, r) \nsubseteq F^c$$

סתירה.

לכן:

$$x_0 \in F$$

לכן, F מכילה את כל הנקודות הגבוליות שלה.

$\boxed{\Longrightarrow}$

נניח כי F מכילה את כל הנקודות הגבוליות שלה.

נניח בשלילה כי F אינה סגורה.

לכן, F^c אינה פתוחה.

לכן, קיימת נקודה $x_0 \in F^c$ כך שלכל $0 < r$:

$$B(x_0, r) \nsubseteq F^c$$

לכן, לכל $0 < r$ קיימת נקודה $x \in B(x, r)$ כך ש:

$$x \in F$$

לכן, x_0 נקודה גבולית של F.

לכן:

$$x_0 \quad \in \quad F$$

סתירה.

לכן, F סגורה.

$$\blacksquare$$

הגדרה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

הקבוצה $E \cup E'$ נקראת **הסגור** של E, ומסומנת $\bar{E}$.

הערה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

אזי:

$$\bar{E} \quad = \quad E \cup \partial E$$

למה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

הסגור $\bar{E}$ הוא קבוצה סגורה.

הגדרה

קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת **חסומה** אם קיים כדור פתוח המכיל את E.

הגדרה

קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת **קומפקטית** אם היא סגורה וחסומה.

הגדרה

תהי $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה חסומה.

הקוטר של E הוא המספר:

$$\operatorname{diam} E \quad := \quad \sup_{x,y \in E} ||x-y||$$

משפט (הלמה של קנטור)

תהי $\{E_k\}$ סדרה של קבוצות קומפקטיות לא ריקות ב - $\mathbb{R}^n$, כך ש:

1. לכל $k \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$E_{k+1} \subseteq E_k$$

2. מתקיים:

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam} E_k = 0$$

אזי, החיתוך:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

<u>מכיל</u> נקודה <u>אחת</u> ויחידה.

הוכחה

תחילה, נוכיח כי:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \neq \emptyset$$

לכל $k \in \mathbb{N}$:

$$E_k \neq \emptyset$$

לכן, לכל $k \in \mathbb{N}$, נבחר באופן שרירותי:

$$x_k \in E_k$$

נקבל סדרה $\{x_k\}$.

נוכיח כי $\{x_k\}$ סדרת קושי.

יהי $0 < \varepsilon$.

עפ"י (2), קיים $N \in \mathbb{N}$, כך שלכל $N \leq k \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$\operatorname{diam} E_k < \varepsilon$$

לכל $N \leq k, m \in \mathbb{N}$, עפ"י (1):

$$x_k, x_m \quad \in \quad E_N$$

לכן, עפ"י הגדרת הקוטר, מתקיים:

$$\begin{aligned} ||x_k - x_m|| \quad &\leq \quad \operatorname{diam} E_N \\ &< \quad \varepsilon \end{aligned}$$

לכן, $\{x_k\}$ סדרת קושי.

לכן, $\{x_k\}$ מתכנסת.

נסמן:

$$a \quad := \quad \lim_{k\to\infty} x_k$$

נוכיח כי:

$$a \quad \in \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

יהי $k_0 \in \mathbb{N}$.

נניח בשלילה כי:

$$a \quad \in \quad E_{k_0}^c$$

עפ"י (1), לכל $k_0 \leq k \in \mathbb{N}$:

$$(i): \quad x_k \quad \in \quad E_{k_0}$$

E_{k_0} קומפקטית, ובפרט סגורה, לכן $E_{k_0}^c$ פתוחה.

לכן, קיים $\varepsilon_0 > 0$, כך ש:

$$B(a, \varepsilon_0) \quad \subseteq \quad E_{k_0}^c$$

קיים $N_0 \in \mathbb{N}$, כך שלכל $N_0 \leq k \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$||x_k - a|| \quad < \quad \varepsilon_0$$

עפ"י הגדרת הכדור הפתוח, לכל $N_0 \leq k \in \mathbb{N}$:

$$(ii):\quad x_k \in B(a,\varepsilon_0) \in E_{k_0}^c$$

יהי $\max\{k_0,N_0\} \le m_0 \in \mathbb{N}$.

עפ"י (i):

$$x_{m_0} \in E_{k_0}$$

עפ"י (ii):

$$x_{m_0} \in E_{k_0}^c$$

סתירה.

לכן:

$$a \in E_{k_0}$$

הנ"ל נכון לכל $k_0 \in \mathbb{N}$, לכן:

$$a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

לכן:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \neq \emptyset$$

כעת, נוכיח כי:

$$\left|\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right| = 1$$

יהיו:

$$a,b \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$$

לכן, לכל $k \in \mathbb{N}$:

$$a,b \in E_k$$

עפ"י הגדרת הקוטר, לכל $k \in \mathbb{N}$:

$$||a-b|| \quad \leq \quad \operatorname{diam} E_k$$

עפ"י (2) ומשפט הסנדוויץ', נקבל:

$$||a-b|| \quad = \quad 0$$

לכן:

$$a-b \quad = \quad 0$$

לכן:

$$a \quad = \quad b$$

לכן:

$$\left|\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right| \quad = \quad 1$$

$$\blacksquare$$