88-132 – פתרון בוחן תשע"ח

<u>שאלה 1 (35 נק')</u>

א. (27 נק') גיזרו את הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x^5+1}$ ***<u>לפי הגדרה</u>***.

יהי $0\neq\Delta x\approx 0$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^5+1}-\sqrt[3]{x^5+1}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^5+1}-\sqrt[3]{x^5+1}\right)\left(\sqrt[3]{((x+\Delta x)^5+1)^2}+\sqrt[3]{(x+\Delta x)^5+1}\sqrt[3]{x^5+1}+\sqrt[3]{(x^5+1)^2}\right)}{\Delta x\left(\sqrt[3]{((x+\Delta x)^5+1)^2}+\sqrt[3]{(x+\Delta x)^5+1}\sqrt[3]{x^5+1}+\sqrt[3]{(x^5+1)^2}\right)}=$$

$$=\frac{(x+\Delta x)^5+1-(x^5+1)}{....}=\frac{x^5+5x^4\Delta x+10x^3\Delta x^2+10x^2\Delta x^3+5x\Delta x^4+\Delta x^5-x^5-1}{....}=$$

$$=\frac{5x^4\Delta x+10x^3\Delta x^2+10x^2\Delta x^3+5x\Delta x^4+\Delta x^5}{....}=$$

$$=\frac{5x^4+10x^3\Delta x+10x^2\Delta x^2+5x\Delta x^3+\Delta x^4}{\sqrt[3]{((x+\Delta x)^5+1)^2}+\sqrt[3]{(x+\Delta x)^5+1}\sqrt[3]{x^5+1}+\sqrt[3]{(x^5+1)^2}}$$

כעת ניתן לקחת חלק סטנדרטי:

$$st(...)=\frac{5x^4}{\sqrt[3]{(x^5+1)^2}+\sqrt[3]{x^5+1}\sqrt[3]{x^5+1}+\sqrt[3]{(x^5+1)^2}}=\frac{5x^4}{3\sqrt[3]{(x^5+1)^2}}$$

כלומר $f'(x)=\dfrac{5x^4}{3\sqrt[3]{(x^5+1)^2}}$.

ב. (8 נק') גיזרו את הפונקציה $f(x)=\sqrt[3]{x^5+1}$ לפי כללי גזירה, והראו כי קיבלתם את אותה התוצאה כמו בסעיף א'.

מתקיים $f(x)=(x^5+1)^{\frac{1}{3}}$ לכן $f'(x)=\dfrac{1}{3}(x^5+1)^{\frac{-2}{3}}\cdot 5x^4=\dfrac{5x^4}{3\sqrt[3]{(x^5+1)^2}}$.

<u>שאלה 2 (35 נק')</u>

א. (18 נק') תהיינה u,v פונקציות גזירות של המשתנה x , ותהי $y=\dfrac{\sin(uv)}{v(u+v)^3}$.

בטאו את $\dfrac{dy}{dx}$ באמצעות $u,v,\dfrac{du}{dx},\dfrac{dv}{dx}$.

אין צורך בכלל לפשט את התוצאה שהתקבלה בגזירה.

הנגזרת של המונה: $\cos(uv)(\frac{du}{dx}v+\frac{dv}{dx}u)$

הנגזרת של המכנה: $\frac{dv}{dx}(u+v)^3+3v(u+v)^2(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx})$.

לכן:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos(uv)(\frac{du}{dx}v+\frac{dv}{dx}u)v(u+v)^3-(\frac{dv}{dx}(u+v)^3+3v(u+v)^2(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}))\sin(uv)}{v^2(u+v)^6}$$

ב. (17 נק') גיזרו את הפונקציה $f(x)=\sin((\sin x)^{\sin x})$.
אין צורך בכלל לפשט את התוצאה שהתקבלה בגזירה.

לכן: $(\sin x)^{\sin x}=e^{\ln((\sin x)^{\sin x})}=e^{\sin x\ln(\sin x)}$

$$((\sin x)^{\sin x})'=e^{\sin x\ln(\sin x)}(\cos x\ln(\sin x)+\sin x\frac{\cos x}{\sin x})=(\sin x)^{\sin x}\cos x(\ln(\sin x)+1)$$

לכן:

$f'(x)=\cos((\sin x)^{\sin x})(\sin x)^{\sin x}\cos x(\ln(\sin x)+1)$.

<u>שאלה 3 (38 נק')</u>

א. (8 נק') הגדירו את המושגים הבאים:
i. מספר אינפיניטסימלי חיובי
ii. קירבה אינסופית

i. מספר היפרממשי ϵ יקרא <u>אינפיניטסימלי חיובי</u> אם לכל מספר ממשי חיובי r מתקיים $0<\epsilon<r$.
ii. שני מספרים היפרממשיים a,b יקראו <u>קרובים אינסופית</u> ונסמן $a\approx b$ אם $a-b$ הוא מספר אינפיניטסימלי.

ב. (15 נק') יהיו a,b,a',b' מספרים היפרממשיים כך ש- $a\approx a'$ וכן $b\approx b'$. הוכיחו או הפריכו:
$a+b\approx a'+b'$

הטענה נכונה. להלן הוכחה:

נתון כי $a-a',b-b'$ הם מספרים אינפיניטסימליים.

צ"ל כי $(a+b)-(a'+b')$ הוא מספר אינפיניטסימלי.

מתקיים $a+b-(a'+b')=(a-a')+(b-b')$.

לפי הנתון $a-a',b-b'$ הם מספרים אינפיניטסימלים, לכן החיבור שלהם הוא מספר אינפיניטסימלי. מש"ל.

ג. (15 נק') יהיו a,b,a',b' מספרים היפרממשיים כך ש- $a\approx a'$ וכן $b\approx b'$. הוכיחו או הפריכו:
$ab\approx a'b'$

הטענה לא נכונה. נראה דוגמא נגדית:
יהי ϵ מספר אינפיניטסימלי שונה מאפס כלשהו.
נבחר $a=\epsilon,a'=2\epsilon$, וכן $b=b'=\frac{1}{\epsilon}$.
אכן מתקיים כי $a\approx a'$ כי $a-a'=-\epsilon$
וכן מתקיים כי $b\approx b'$ כי $b-b'=0$
אך המסקנה לא מתקיימת, כי $ab-a'b'=\epsilon\frac{1}{\epsilon}-\frac{2\epsilon}{\epsilon}=1-2=-1$ מספר משמעותי.