כדי להראות ששני מרחבים טופולוגיים הם הומיאומורפים, מספיק למצוא הומיאומורפיזם.
כדי להראות שהם לא הומיאומורפים, צריך להוכיח שלא יכול להיות ביניהם הומיאומורפיזם.
ניתן לעשות זאת על ידי מציאת תכונה טופולוגית שיש באחד ואין בשני.

דוגמה

דוגמה לתכונה טופולוגית כזו היא קשירות.

$$(0,1) \qquad [0,1) \qquad [0,1]$$

בכל אחד מהם יש מספר נקודות שונה שניתן לזרוק אותן ולשמור על קשירות, ולכן הם לא הומיאומורפים.

ההוכחה בצורה פורמלית

נניח בשלילה שיש הומאומורפיזם $h:[a,b)\to(c,d)$. כלומר h רציפה וקיימת g רציפה $g:(c,d)\to[a,b)$ כך ש

$$g\circ h=\mathrm{Id}_{[a,b)} \qquad h\circ g=\mathrm{Id}_{(c,d)}$$

נביט בצמצום

$$h|_{(a,b)}:(a,b)\to(c,d)$$

אזי ע"י צמצום הטווח נקבל

$$h|_{(a,b)}\left(\underbrace{(a,b)}_{\text{connected}}\right)=\underbrace{(c,d)-h\left(a\right)}_{\text{disconnected}}$$

בסתירה לכך שהתמונה של מרחב קשיר צריכה להיות מרחב קשיר.

באופן כללי

אם יש שני מרחבים טופולוגים X,Y, מניחים שיש הומיאומורפיזם $h:X\to Y$, ועבור קבוצה $A\subseteq X$ כלשהי מצמצמים את התחום

$$h|_{X-A}:X-A\to Y$$

ואחרי זה מצמצמים גם את הטווח

$$h|_{X-A}:X-A\to Y-h\left(A\right)$$

זהו הומיאומורפיזם כי

$$g|_{Y-h(A)}:Y-h\left(A\right)\to X-A$$

רציפה, וההרכבה בשני הכיוונים היא $\mathrm{Id}_{X-A}, \mathrm{Id}_{Y-h(A)}$.

כמה מילים על המבחן

- יופיעו משפטים מהכיתה. צריך לדעת להוכיח כל מה שלמדנו בכיתה.
- יהיו שאלות משיעורי בית

בנייה/הגדרה

יהי X מ"ט. נגדיר על X את יחס השקילות הבא:
$a, b \in X$, אז $a \sim b$ אם קיים תת מרחב קשיר $A \subseteq X$ כך ש$a, b \in A$.
זהו אכן יחס שקילות:

1. רפלקסיביות ־ לכל $a \in X$, $a, a \in \{a\}$, ו$\{a\}$ בהגדרה קשיר, לכן $a \sim a$
2. סימטריות ־ טריוויאלי
3. טרנזיטיביות ־ לכל $a, b, c \in X$ כך ש$a \sim b, b \sim c$, קיימים A, B קשירים כך ש$a, b \in A, b, c \in C$, ואז $a, c \in A \cup B$, ו$A \cup B$ קשיר שכן A, B קשירים ו$A \cap B \neq \emptyset$ שכן $b \in A \cap B$.

מחלקות השקילות של יחס השקילות $\sim$ נקראים מרכיבי הקשירות של X.

תכונות

1. אם $A \subseteq X$ קשיר אז A מוכל באחד ממרכיבי הקשירות של X, כי לכל $a, b \in A$ מתקיים $a \sim b$, כלומר על הנקודות בA שקולות זו לזו, לכן A מוכל באחת ממחלקות השקילות, כלומר באחד ממרכיבי הקשירות.
2. מרכיבי הקשירות הם קשירים: נניח C מרכיב קשירות של X, ונניח $a, b \in C$, כלומר $a \sim b$, כלומר יש $A \subseteq X$ קשיר כך ש$a, b \in A$. מתכונה (1) A מוכל באחד ממרכיבי הקשירות, וכיוון ש$A \cap C \neq \emptyset$ (a, b נמצאים שם) בהכרח המרכיב הזה הוא C עצמו.

   קיבלנו שלכל $a, b \in C$ יש תת מרחב $C \subseteq A$ קשיר כך ש$a, b \in A$. לפי טענה מהשיעור הקודם נובע שC קשיר.

   #### מסקנת ביניים

   מרכיבי הקשירות הם תתי המרחבים הקשירים המקסימליים בX(כלומר כל תת מרחב קשיר מוכל באחד מהם)

   #### בפרט מסקנה

   אם C מרכיב קשירות ו$C \subsetneqq A$ אז A לא קשיר.

3. מרכיבי הקשירות הם קבוצות סגורות

הוכחה

יהי C מרכיב קשירות. אז C צפוף ב־$\overline{C}$, לכן $\overline{C}$ קשיר. $C \supseteq \overline{C}$, מכאן ש־$C = \overline{C}$, כלומר C סגור.

4. אם יש רק מספר סופי של מרכיבי קשירות אז הם גם פתוחים.

הוכחה

נניח $C_1, \ldots C_n$ הם מרכיבי הקשירות של X. תכונה 3 אומרת שכל C_i הוא קבוצה סגורה.

$$C_i = \left(\bigcup_{\substack{k \neq j \\ 1 \leq k \leq n}} C_k \right)^c$$

האיחוד הזה הוא איחוד סופי של קבוצות סגורות, ולכן סגור, לכן המשלים שלו, C_i, קבוצה פתוחה.

דוגמה

עבור $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, מרכיבי הקשירות הם

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1) \subseteq \mathbb{R}$$

טענה

עבור המרחב $\mathbb{Q}$, מרכיבי הקשירות כולם מהצורה $\{p\}$

הוכחה

נניח $A \subseteq \mathbb{Q}$ ובו לפחות שתי נקודות $a \neq b \in A$. נראה ש־A לא קשיר. נניח בה"כ $a < b$.
קיים t אי־רציונלי כך ש־$a < t < b$. אזי עבור

$$U = (-\infty, t) \cap A \qquad V = (t, \infty) \cap A$$

$U, V \subseteq A$ מראים ש־A לא קשיר.

הגדרה

יהי X מ"ט.
מסילה ב־X היא פונקציה רציפה $\varphi : [0,1] \to X$.
אם $\varphi(0) = a$ ו־$\varphi(1) = b$ אז אנו נאמר שהמסילה היא "מ־a ל־b".

הגדרה

יהי X מ"ט.
X נקרא קשיר מסילתית אם לכל $a,b\in X$ יש מסילה מa לb.

משפט

אם X קשיר מסילתית אז X קשיר.

הוכחה

לכל $a,b\in X$ נמצא תת מרחב קשיר $A\subseteq X$ כך ש$a,b\in A$.
אכן, בהינתן $a,b\in X$ יש מסילה $\varphi:[0,1]\to X$ כך ש$\varphi(0)=a$ ו$\varphi(1)=b$. ניקח $A=\varphi([0,1])$. A קשיר כי A הוא תמונה רציפה של המרחב הקשיר $[0,1]$. $a,b\in A$, וזה לכל a,b, לכן לפי התנאי משבוע שעבר X קשיר.

משפט

אם X קשיר מסילתית, $f:X\to Y$ רציפה ו<u>על</u> Y, אז Y קשיר מסילתית.

הוכחה

יהיו $a,b\in Y$. כיוון שf על, יש $x,y\in X$ כך ש$f(v)=a,f(y)=b$. כיוון שX קשיר מסילתית יש $\varphi:[0,1]\to X$ רציפה כך ש$\varphi(0)=x,\varphi(1)=y$. אזי $f\circ\varphi:[0,1]\to Y$ היא מסילה שמקיימת

$$f\circ\varphi(0)=a\qquad f\circ\varphi(1)=b$$

מסקנה

אם X קשיר מסילתית, $f:X\to Y$ רציפה, אזי $f(X)$ קשיר מסילתית.

הוכחה

צמצום הטווח ל$f(X)$:
$f:X\to f(X)$ וזה כבר על, אז לפי המשפט $f(X)$ קשיר מסילתית.

הגדרה

יהי $\varphi,\psi:[0,1]$ שתי מסילות, ונניח ש$\varphi(1)=\psi(0)$.
נגדיר מסילה חדשה

$$\varphi*\psi:[0,1]\to X$$

באופן הבא:

$$\varphi*\psi(t):=\begin{cases}\varphi(2t) & 0\le t\le\frac{1}{2}\Rightarrow t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \psi(2t-1) & \frac{1}{2}\le t\le 1\Rightarrow t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

$\varphi*\psi$ נקרא השרשור של φ ו-ψ.

כדי שזו תהיה מסילה צריך להראות ש-$\varphi*\psi$ רציף. מספיק להראות ש

$$\left[0,\frac{1}{2}\right]\xrightarrow{t\mapsto\varphi(2t)}X\qquad\left[\frac{1}{2},1\right]\xrightarrow{t\mapsto\psi(2t-1)}X$$

רציפות, כי אלה קבוות סגורות ב-$[0,1]$. אבל שתיהן הרכבות של פונקציות רציפות ולכן רציפות בעצמן.

הגדרה/בניה

בהינתן מ"ט X נגדיר על X יחס שקילות $\equiv$ על X.

עבור $a,b\in X$, $a\equiv b$ אם יש מסילה מ-a ל-b

זה אכן יחס שקילות:

1. רפלקסיביות: מסילה קבועה
2. סימטריות: נניח $a\equiv b$ כלומר קיימת מסילה $X\to[0,1]:\varphi$ כך ש-$\varphi(0)=a,\varphi(1)=b$. בהינתן מסילה $\varphi:[0,1]\to X$ נגדיר $\overline{\varphi}:[0,1]\to X$ ע"י $\overline{\varphi}(t):=\varphi(1-t)$. אזי מתקיים $\begin{matrix}\overline{\varphi}(0)=b\\ \overline{\varphi}(1)=a\end{matrix}$, לכן $a\equiv b$.
3. נניח $a\equiv b$, כלומר יש מסילה φ מ-a ל-b, ונניח $b\equiv c$, אזי $\varphi*\psi$ היא מסילה מ-a ל-c.

למחלקות השקילות של יחס שקילות זה אנו קוראים מרכיבי הקשירות המסילתית של X.

תכונות

1. נניח $A\subseteq X$ קשיר מסילתית, אזי A מוכל באחד ממרכיבי הקשירות המסילתית של X.

הוכחה

יהיו $a,b\in A$, A קשיר מסילתית. לכן יש מסילה $\varphi:[0,1]\to A$ כך ש-$\varphi(0)=a,\psi(1)=b$. נסמן $i:A\to X$ את העתקת ההכלה. אזי $i\circ\varphi:[0,1]\to X$ מסילה, ולכן $a\equiv b$ ב-X. כלומר כל שתי נקודות ב-A שקולות זו לזו ולכן A מוכל באחת ממחלקות השקילות, כלומר באחד ממרכיבי הקשירות של X.

2. מרכיבי הקשירות המסילתית הם קשירים מסילתית.

לסיכום

בדומה למרכיבי קשירות:

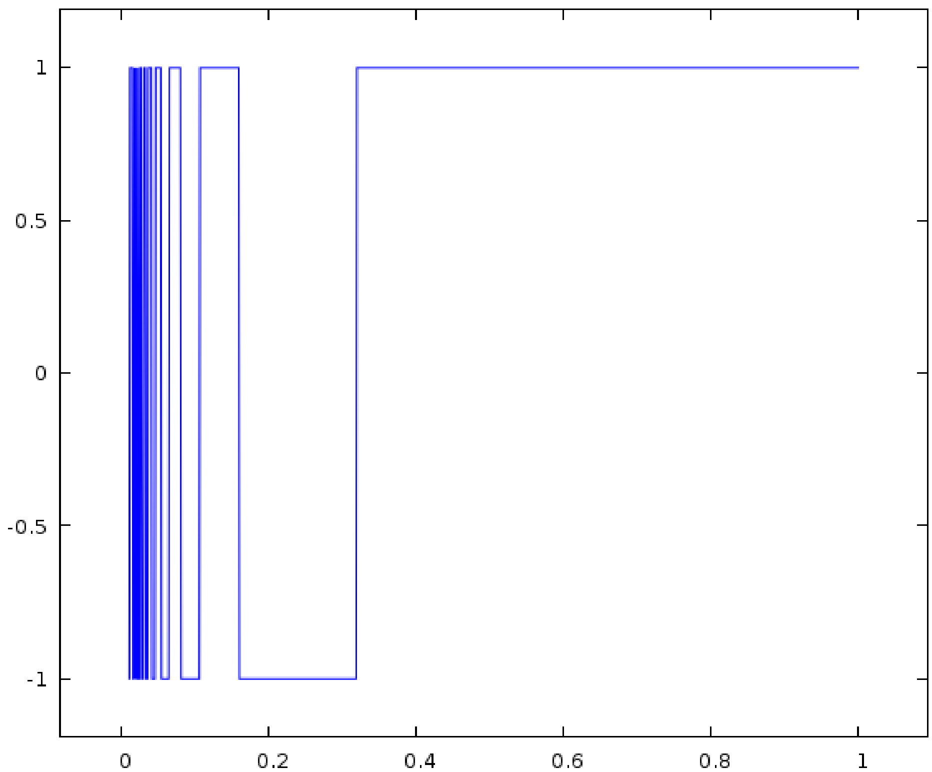
מרכיבי הקשירות המסילתית הם תתי מרחבים קשירים מסילתית מקסימליים, והם מהווים חלוקה של X.

דוגמה

$$X \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$X = \underbrace{\{(x,y)|x=0,-1\leq y\leq 1\}}_{A} \cup \underbrace{\left\{(x,y)\middle|x=\frac{1}{n},-1\leq y\leq 1\right\}}_{B} \cup$$

$$\underbrace{\cup \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \text{odd}}} \left\{(x,y)\middle|y=1,\frac{1}{n+1}\leq x\leq \frac{1}{n}\right\} \cup \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \text{even}}} \left\{(x,y)\middle|y=-1,\frac{1}{n+1}\leq x\leq \frac{1}{n}\right\}}_{B}$$



A הוא הקו הראשון, B הוא שאר הקווים, $X = A \cup B$

טענות

A וB קשירים מסילתית(בפרט קשירים)

B צפוף בX ולכן גם X קשיר.

כדי להראות שX איננו קשיר מסילתית, עלינו להראות שאם $a \in A$ ו$b \in B$ אז אין מסילה מa לb.