(88133) חשבון אינפינטסימלי 2 | האינטגרל הלא מסויים ושיטות אינטגרציה

יונתן סמידוברסקי

מבוסס על הרצאות של פרופ' צבאן

האינטגרל הלא מסויים

(הגדרה)

הגדרה $F(x)$ הוא **פונקציה קדומה** של $f(x)$ בקטע מוכלל אם $F'(x)=f(x)$.

למה אם F פו' קדומה של f בקטע מוכלל, אז לכל קבוע $c\in\mathbb{R}$ גם הפונקציה $F+c$ הינה קדומה של f.

יתר על כן, כל פו' קדומה של f הינה מהצורה $F+c$.

הוכחה

הטענה הראשונה נובעת מכך ש

$$(F+c)'=F'+c'=F'+0=F'=f$$

וכעת לטענה השנייה, תהיינה F_1,F_2 פונקציות קדומות ל-f, כעת נגזור

$$(F_1-F_2)'=F_1'-F_2'=f-f=0$$

זה אומר ש$F_1-F_2=c$ לאיזשהו קבוע c וסיימנו.

(ממשפט ערך הממוצע הפונקציה F_1-F_2 חייבת להיות קבועה, לכל a,b שמציבים- ערכם זהה)

$\blacksquare$

הגדרה **האינטגרל הלא מסוים** של f מסומן $\int f(x)dx$ הוא קבוצת הפונקציות הקדומות של f. מסמנים:

$$\int f(x)dx=F(x)+c_{(c\in\mathbb{R})}$$

אינטגרלים מיידים וחשובים)

$$\int 0dx = c$$

$$\alpha \neq -1, \int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

בקטעים המוכללים $(-\infty,0),(0,\infty)$:

$$\int \frac{dx}{x} = log(|x|) + c$$

$$\int e^{x}dx = e^{x} + c$$

$$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{log(a)} + c$$

$$\int sin(x)dx = -cos(x) + c$$

$$\int cos(x)dx = sin(x) + c$$

$$\int \frac{dx}{cos^2(x)} = tan(x) + c$$

$$\int \frac{dx}{sin^2(x)} = -cot(x) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin(x) + c$$

$$(= arccos(x) + \widetilde{c})$$

משום שcos ו-sin הם הזזות בקבוע אחד של השני.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctan(x) + c$$

שיטות אינטגרציה, טענות ולמות

(תיקון קבועים מיידי)

אם $\int f(x)dx = g(x) + c$ אז $\int f(ax+b)dx = \frac{g(ax+b)}{a} + c$

<u>הוכחה</u> מכלל השרשרת

$$\left(\frac{g(ax+b)}{a} + c\right) = \frac{\cancel{1}}{\cancel{a}} \cdot g'(ax+b) \cdot \cancel{a} = g'(ax+b)$$

(כשהמונה הוא נגזרת המכנה)

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = log|f(x)| + c$$

<u>הוכחה</u>

$$(log|f(x)| + c)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

(לינאריות)

$$\int (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx + c$$

<u>הוכחה</u> יהיו F, G פונקציות קדומות לf, g

$$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$$

(אינטגרציה בחלקים)

<u>סימון</u> נסמן $\frac{d}{dx}g = f$ (או $\frac{dg}{dx}$), כלומר $g' = f$.
נכתוב גם $dg = fdx$ ($dg = g'dx$)
לדוגמה, $dsin(x) = cos(x)dx$
<u>משפט</u> עבור פונקציות גזירות u, v מתקיים

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

(כלומר $\int uv'dx = u \cdot v - \int vu'dx$)
<u>הוכחה</u> ניזכר כי

$$(uv)' = u'v + v'u$$

ולכן,

$$uv + c = \int (uv)'dx = \int [u'v + v'u]dx$$

$$\int (uv')dx = uv - \int vu'dx$$

(כאשר הקבוע מופיע באינטגרל)

$$\blacksquare$$

(שיטת ההצבה)

<u>משפט</u> יהיו I, J קטעים מוכללים.

(א) <u>הצבה</u> אם $u : J \to I$ גזירה ב-J אז

$$\boldsymbol{\int f\left(u(x)\right) \cdot u'(x) dx \underset{t=u(x)}{=} \int f(t) dt}$$

במובן הבא, אם $\int f(t)dt = g(t) + c$ בקטע I אז

$$\int f\left(u(x)\right) \cdot u'(x) dx = g(u(x)) + c$$

(ב) <u>הצבה הפוכה</u> אם $v : I \to J$ מונוטונית ממש, גזירה ועל אז

$$\boldsymbol{\int f(x) dx \underset{x=v(t)}{=} \int f\left(v(t)\right) \cdot v'(t) dt}$$

במובן הבא, אם $\int f\left(v(t) \cdot v'(t) dt = g(t) + c\right.$
אז

$$\int f(x) dx = g(v^{-1}(x))$$

<u>הוכחה</u>

א) בהינתן הנתונים, יש להוכיח $g(u(x))$ פונקציה קדומה של $f(u(x)) \cdot u'(x)$ ואכן מכלל השרשרת:

$$g(u(x))' = g'(u(x)) \cdot u'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)$$

ב)

$$[g(v^{-1}(x))]' = g'(v^{-1}(x)) \cdot (v^{-1}(x)) = g'(v^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{v'(t)}$$

$$= f(v(v^{-1}(x)) \cdot v'(t) \cdot \frac{1}{v'(t)} = f(x)$$

דוגמאות

(א) $\int \frac{dx}{1+(ax)^2}$

מלינאריות,

$$\int \frac{dx}{1+(ax)^2} = \frac{arctan(ax)}{a} + c$$

(ב) $\int tan(x)dx$ **,** $\int cot(x)dx$

נכתוב כך:

$$\int \frac{sin(x)}{cos(x)}dx = -\int \frac{-sin(x)}{cos(x)}dx$$

וניעזר ב"**כשהמונה נגזרת המכנה**"

$$= -log|cos(x)| + c$$

ואז בצורה דומה

$$\int cot(x)dx = \int \frac{cos(x)}{sin(x)}dx = log|sin(x)| + c$$

(ג) $\int log(x)dx$

$$\int \underbrace{log(x)}_{u} \underbrace{dx}_{dv(v=x)}$$

כעת, **אינטגרציה בחלקים**

$$u = log(x)$$

$$du = \frac{1}{x}dx$$

$$dx = \frac{du}{x}$$

ונציב,

$$\int udv = uv - \int vdu = log(x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x \cdot log(x) - x + c$$

ד) $\int x^2 cos(x)dx$

שוב ניעזר **באינטגרציה בחלקים**

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{cos(x)dx}_{dv(v=sin(x))}$$

$$du = 2xdx, v = sinx$$

$$\int x^2 cos(x) = x^2 sin(x) - \int sin(x) \cdot 2xdx$$

כעת נמצא את $\int sin(x) \cdot 2xdx$

$$\int \underbrace{2x}_{u} \underbrace{sin(x)dx}_{dv(v=-cos(x))}$$

$$u = 2x$$

$$du = 2dx$$

$$\int 2xsin(x)dx = -2xcos(x) + \int -cos(x)2dx = -2xcos(x) + 2sin(x) + c$$

מציבים במקור לקבלת

$$\int x^2 cos(x) = x^2 sin(x) + 2xco(x) - 2sin(x) + c$$

(ה) $\int xe^x dx$

שוב ניעזר ב**אינטגרציה בחלקים**

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv}$$

$$u = x$$

$$du = dx$$

וכן

$$v = e^x$$

$$dv = e^x dx$$

וכעת נפתור

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + c$$

$\int arctan(x)dx$ **(ו)**

שוב **אינטגרציה בחלקים**, הפעם נשתמש בטריק **כפל באחד**

$$\int arctan(x)dx = \int \underbrace{arctan(x)}_{u} \cdot \underbrace{1dx}_{dv}$$

כעת

$$v = x$$

$$dv = dx$$

וכן,

$$u = arctan(x)$$

$$du = \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\int arctan(x)dx = arctan(x) \cdot x - \int \frac{x}{1+x^2}dx$$

נשתמש ב"**כשהמונה נגזרת המכנה**" , צריך רק לדאוג לקבועים

$$= arctan(x) \cdot x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = arctan(x) \cdot x - \frac{1}{2} \cdot log|x^2+1| + c$$

(ז) $\int e^x cos(2x)dx$

מתוך תרגול

אינטגרציה בחלקים: ניקח

$$u = cos(2x)$$

$$du = -2sin(2x)dx$$

וכן,

$$v = e^x$$

$$dv = e^x dx$$

כעת

$$\int e^x cos(2x)dx = e^x cos(2x) - \int -2sin(2x)e^x dx = e^x cos(2x) + 2\underleftrightarrow{\int sin(2x)e^x dx}$$

נחשב שוב לפי **אינטגרציה בחלקים**

$$\widetilde{u} = sin(2x)$$

$$d\widetilde{u} = 2cos(2x)dx$$

$$\widetilde{v} = e^x$$

$$d\widetilde{v} = e^x dx$$

$$\int sin(2x)e^x dx = e^x sin(2x) - \int 2cos(2x)e^x$$

נשים לב שקיבלנו ביטוי שתלוי באינטגרל המקורי, נציב

$$\int e^x cos(2x)dx = e^x cos(2x) + 2[e^x sin(2x) - \int 2cos(2x)e^x] + c$$

$$\int \boldsymbol{e^x cos(2x)dx} = e^x cos(2x) + 2e^x sin(2x) - 4\int \boldsymbol{e^x cos(2x)dx + c}$$

$$\mathbf{5}\int \boldsymbol{e^x cos(2x)dx} = e^x cos(2x) + 2e^x sin(2x) + c$$

נחלק ב-5 את שני הצדדים ונקבל

$$\int e^x cos(2x)dx = \frac{e^x cos(2x) + 2e^x sin(2x)}{5} + \widetilde{c}$$

ח) $\int e^{cos(x)} sin(x)dx$

נרצה להשתמש **בשיטת ההצבה**,נגדיר

$$u(x) = cos(x)$$

$$du = -sin(x)dx$$

כעת

$$-\int e^u du = -e^u + c = -e^{cos(x)} + c$$

ט) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx$

נשתמש ב**הצבה הפוכה**, נגדיר

$$x = t^2$$

$$dx = 2tdt$$

(נשים לב גם ש$\sqrt{x} = t$) ונציב

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx = \int \frac{t}{t^2-1}2tdt = \int \frac{2t^2}{t^2-1}dt = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}dt$$

נשתמש בטריק של **הורדת והוספת אחד**

$$= 2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt = 2(\int \frac{t^2-1}{t^2-1}dt + \int \frac{1}{t^2-1}dt) = 2t - arctan(t) + c$$

כעת נציב

$$= 2\sqrt{x} - arctan(\sqrt{x}) + c$$

(י) הצבה טריגונומטרית $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$

נציב, **הצבה פוכה** $x = asin(t)$ עבור $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (מונוטונית ממש, גזירה ועל)

$$asin(t) : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-a, a]$$

כמו כן,

$$x = asin(t) \Longrightarrow t = arcsin(\frac{x}{a})$$

$$dx = acos(t)dt$$

ואז מציבים

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int \sqrt{a^2 - a^2sin^2(t)} \cdot acos(t)dt = \int \sqrt{a^2(1-sin^2(t))} \cdot acos(t)dt$$

$$= \int a\sqrt{cos^2(t)} \cdot acos(t)dt = \int a^2cos^2(t)dt = a^2 \int cos^2(t)dt = a^2 \int \frac{cos(2t)+1}{2}dt$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש$cos(2t) = 2cos^2(t) - 1$.

$$= a^2(\frac{sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}) + c = a^2(\frac{sin(2arcsin(\frac{x}{a}))}{4} + \frac{1}{2}arcsin(\frac{x}{a})) + c$$

נשים לב ש:

$$sin(2arcsin(\frac{x}{a})) = 2sin(arcsin(\frac{x}{a})) \cdot cos(arcsin(\frac{x}{a})) = 2\frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - sin^2(arcsin(v))} = 2\frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{x}{a}^2}$$

כעת חוזרים לאינטגרל המקורי ומסיימים

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}(\frac{x}{a}\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2} + arcsin(\frac{x}{a})) + c$$

(יא) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ ההצבה של אוילר

נפתור את $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ולבסוף נעשה התאמות.
ניקח

$$t = x + \sqrt{1+x^2}$$

$$t - x = \sqrt{1+x^2}$$

$$t^2 - 2tx + x^2 = 1 + x^2$$

$$t^2 - 1 = 2tx$$

$$x = \frac{t^2-1}{2t}$$

כעת

$$dx = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{t^2})dt$$

ונשים לב גם כי

$$\sqrt{1+x^2} = t - x = t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$$

כעת להצבה:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{t^2})}{\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})}dt = \int \frac{t^2+1}{t^3+t}dt = \int \frac{1}{t}dt = log|t| + c = log(x + \sqrt{1+x^2}) + c$$

ובאופן כללי, ניקח בלי הגבלת הכלליות $a > 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} =_{a>0} \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \cancel{\frac{1}{a}} \cdot \frac{log(\frac{x}{a} + \sqrt{1+(\frac{x}{a})^2}}{\cancel{(\frac{1}{a})}} + c = log(\frac{x}{a} + \sqrt{1+(\frac{x}{a})^2} + c$$