<u>תזכורת:</u>

יהי V מרחב וקטורי ויהי $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס סדור. כל וקטור $v\in V$ אפשר לרשום כצירוף ליניארי של איברי B באופן יחיד. כלומר, קיימים סקלרים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ עבורם: $v=\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_nv_n$. וקטור הקואורדינטות של v ביחס ל־B הוא:

$$[v]_B=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

תכונות: $[v]_B=0 \iff v=0$, $[v]_B=[w]_B \iff v=w$, $[\alpha v+w]_B=\alpha[v]_B+[w]_B$.

טכנית, כדי למצוא את $[v]_B$, נשים את איברי B בעמודות מטריצה, את v בעמודה נוספת ונדרג את B קנונית עד ל־I; הוקטור שנקבל בסופו של דבר בעמודה הנוספת הוא $[v]_B$. בתיאור סכמטי: $(B|v)\to(I|\,[v]_B)$.

כעת, יהי C בסיס נוסף של V. מטריצת המעבר מ־B ל־C מסומנת: $[I]_C^B$ ומוגדרת כך: $C_i\left([I]_C^B\right)=[v_i]_C$, כלומר העמודה ה־$i$ של המטריצה היא הקואורדינטות של הוקטור ה־i של B, לפי C. זו המטריצה היחידה המקיימת: $[I]_C^B[v]_B=[v]_C$ לכל $v\in V$.

תכונות: $[I]_D^C[I]_C^B=[I]_D^B$, $\left([I]_C^B\right)^{-1}=[I]_B^C$, $[I]_B^B=I$.

טכנית, כדי למצוא את $[I]_C^B$, נשים את איברי C בעמודות מטריצה משמאל, ואת איברי B בעמודות מטריצה מימין, נדרג את איברי C קנונית ל־I, והמטריצה מימין היא $[I]_C^B$. בתיאור סכמטי: $(C|B)\to\left(I|\,[I]_C^B\right)$.

כעת, יהיו V,W מרחבים וקטוריים, $B=\{v_1,\ldots,v_n\},C=\{w_1,\ldots,w_m\}$ בסיסים של V,W בהתאמה. תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית.

המטריצה המייצגת את ההעתקה הליניארית T ביחס לבסיסים B,C מסומנת: $[T]_C^B$, ומוגדרת כך: $C_i\left([T]_C^B\right) = [T(v_i)]_C$, כלומר העמודה ה־$i$ של המטריצה המייצגת היא הקואורדינטות של התמונה של הוקטור ה־i של B, לפי C. זו המטריצה היחידה המקיימת:

$$[T]_C^B[v]_B = [T(v)]_C$$

לכל $v \in V$.

ברמה הטכנית, כדי למצוא את $[T]_C^B$, נשים את איברי C בעמודות מטריצה משמאל, ואת **התמונות** איברי B בעמודות מטריצה מימין, נדרג את איברי C קנונית ל־I, והמטריצה מימין היא $[T]_C^B$. בתיאור סכמטי: $(C|T(B)) \to \left(I|\,[T]_C^B\right)$.

<u>למשל:</u>

נתבונן בהעתקה הליניארית $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי: $T(x,y) = (3x+y, 3x-y, x)$, ובבסיסים: $C = \{(1,1,1),(1,0,1),(1,0,0)\}, B = \{(1,2),(2,1)\}$.

נמצא את $[T]_C^B$.

ראשית, נמצא את תמונותיהם של איברי הבסיס B. אם כן:

$$T(1,2) = (5,1,1)\,,\ T(2,1) = (7,5,2)$$

כעת, נשים אותן בעמודות מול איברי C ונדרג קנונית:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

ולכן:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

נראה שאכן: $[T]_C^B [v]_B = [T(v)]_C$ לכל: $v = (x,y)$. לשם כך, נמצא את הקואורדינטות של (x,y) לפי B:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & y \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -3 & y-2x \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}x \end{array}\right)$$

כלומר: $[(x,y)]_B = \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y, \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y\right)$. כמו כן, נמצא את הקואורדינטות של $T(x,y)$ לפי C:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3x+y \\ 1 & 0 & 0 & 3x-y \\ 1 & 1 & 0 & x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3x-y \\ 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 & 3x+y \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3x-y \\ 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & 2x+y \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3x-y \\ 0 & 1 & 0 & -2x+y \\ 0 & 0 & 1 & 2x+y \end{array}\right)$$

כלומר: $[T(x,y)]_C = (3x-y,-2x+y,2x+y)$.

עכשיו, רגע האמת:

$$[T]_C^B [v]_B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y \\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-y \\ -2x+y \\ 2x+y \end{pmatrix} = [T(v)]_C$$

אחרי הדוגמה הטכנית, נוכיח שהמטריצה המייצגת אכן עושה מה שאנחנו טוענים שהיא עושה – היחידה שמקיימת: לכל $v \in V$, $[T]_C^B [v]_B = [T(v)]_C$.

<u>הוכחה:</u>

נשתמש בכפל עמודה־עמודה. נסמן: $[v]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, כלומר: $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. כעת:

$$[T]_C^B [v]_B = [T]_C^B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 C_1 \left([T]_C^B\right) + \ldots + \alpha_n C_n \left([T]_C^B\right) =$$

$$= \alpha_1 [T(v_1)]_C + \ldots + \alpha_n [T(v_n)]_C = [\alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n)]_C =$$

$$[T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n)]_C = [T(v)]_C$$

כנדרש.

כעת, נראה ש־$[T]_C^B$ היא היחידה שעושה זאת. תהי A מטריצה המקיימת: $A[v]_B = [T(v)]_C$, ונוכיח ש: $A = [T]_C^B$.

מספיק להוכיח ש: $C_i(A) = C_i\left([T]_C^B\right)$, כלומר: $C_i(A) = [T(v_i)]_C$ לכל

$.i$

כעת, לכל $v_i \in B$, $[v_i]_B = e_i$ (כי: $v_i = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \ldots + 0 \cdot v_n$), ולכן: $A[v_i]_B = [T(v_i)]_C$ פירושו:

$$C_i(A) = Ae_i = [T(v_i)]_C$$

כנדרש.

<u>הערות:</u>

1. נשים לב שמטריצת המעבר $[I]_C^B$ היא המטריצה המייצגת של העתקת הזהות: $I : V \to V$ ביחס לבסיסים B, C:

$$[I]_C^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [I(v_1)]_C & \ldots & [I(v_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ [v_1]_C & \ldots & [v_n]_C \\ | & & | \end{pmatrix}$$

2. אם S בסיס סטנדרטי, אז: $[v]_S = v$. לכן, אם $T : V \to W$ העתקה ליניארית ו־S_1, S_2 הבסיסים הסטנדרטיים של V, W בהתאמה, נקבל:

$$[T]_{S_2}^{S_1}[v]_{S_1} = [T(v)]_{S_2} \Longrightarrow [T]_{S_2}^{S_1} v = T(v)$$

לכן, אפשר במובן מסוים "להחליף" את ההעתקה T במטריצה המייצגת לפי הבסיסים הסטנדרטיים – במקום להפעיל את T על v, אפשר להכפיל את v במטריצה המייצגת ולקבל את אותה התוצאה.

למשל, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת על ידי: $T(x, y) = (3x + y, 3x - y, x)$.
אפשר לרשום:

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} 3x + y \\ 3x - y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ולכן המטריצה המייצגת של T לפי הבסיסים הסטנדרטיים היא: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

המסקנה היא שכל העתקה ליניארית אפשר לתאר באמצעות כפל במטריצה.

<u>סימונים ומינוחים:</u>

אם הבסיסים שניהם סטנדרטיים, נסמן: $[T]^{S_1}_{S_2} = [T]$. אם אומרים "המטריצה המייצגת" ולא ברור מההקשר ביחס לאלו בסיסים המטריצה מייצגת, הכוונה היא לבסיסים הסטנדרטיים.

כמו כן, אם $T : V \to V$ (אופרטור), אז נסמן: $[T]^B_B = [T]_B$, זו המטריצה המייצגת את T לפי B.

כעת, יש לנו 3 דרכים להציג העתקה:

א. מפורשות, למשל: $T\left(ax^2+bx+c\right) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c-b & c \end{pmatrix}$. אנו אומרים איך T פועלת על כל איבר ואיבר.

ב. משפט ההגדרה – נתון לנו איך T פועלת על איברי בסיס מסוים. למשל: $T\left(1\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, T\left(x\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, T\left(x^2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ג. מטריצה מייצגת – נתונה לנו $[T]^B_C$, ואנחנו יודעים שהיא מקיימת: $[T]^B_C\left[v\right]_B = \left[T\left(v\right)\right]_C$.

איך עוברים מהצגה אחת לשניה?

מהצגה מפורשת להצגה לפי בסיס אין בעיה לעבור – אם אנחנו יודעים איך ההעתקה הליניארית פועלת על כל איבר ואיבר, אנחנו בפרט יודעים איך היא פועלת על איברי בסיס מסוים.

כמו כן, מהצגה מפורשת אנחנו יודעים לעבור למטריצה המייצגת כך: $(C|T(B)) \to \left(I|\left[T\right]_C^B\right)$.

בנוסף לכך, אם ההעתקה מוגדרת באמצעות בסיס מסוים, כלומר נתון: $T(v_i) = w_i$, נמצא וקטור קואורדינטות של וקטור כללי:

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots \alpha_n v_n$$

ואז: $T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$.

נשארה השאלה – איך עוברים ממטריצה מייצגת להעתקה מפורשת?

כדי לענות על השאלה הזו כמו שצריך, ננסח כמה טענות קצרות על מטריצה מייצגת והקשר שלה למטריצת מעבר.

<u>טענה:</u>

יהיו V, W מרחבים וקטוריים עם בסיסים B_1, C_1 בהתאמה. תהי $T : V \to W$ העתקה ליניארית. יהיו B_2, C_2 בסיסים של V, W. אזי:

$$[T]_{C_1}^{B_1} = [I]_{C_1}^{C_2} [T]_{C_2}^{B_2} [I]_{B_2}^{B_1}$$

<u>הוכחה:</u>

כדי להוכיח שמטריצה A היא המטריצה $[T]_C^B$, אנחנו צריכים להוכיח ש: $A[v]_B = [T(v)]_C$. מכיוון ש-$[T]_C^B$ היא היחידה שמקיימת זאת, נקבל שאכן: $A = [T]_C^B$. כלומר, כדי להוכיח: $[T]_{C_1}^{B_1} = [I]_{C_1}^{C_2} [T]_{C_2}^{B_2} [I]_{B_2}^{B_1}$, צ"ל:

$$[I]_{C_1}^{C_2} [T]_{C_2}^{B_2} [I]_{B_2}^{B_1} [v]_{B_1} = [T(v)]_{C_1}$$

אם כן:

$$[I]_{C_1}^{C_2}[T]_{C_2}^{B_2}[I]_{B_2}^{B_1}[v]_{B_1}=[I]_{C_1}^{C_2}[T]_{C_2}^{B_2}[v]_{B_2}=[I]_{C_1}^{C_2}[T(v)]_{C_2}=[T(v)]_{C_1}$$

כנדרש.

אם כן, הטענה נכונה גם עבור בסיסים סטנדרטיים, ואפשר לרשום:

$$[T]=[T]_{S_2}^{S_1}=[I]_{S_2}^{C}[T]_{C}^{B}[I]_{B}^{S_1}=[I]_{S_2}^{C}[T]_{C}^{B}\left([I]_{S_1}^{B}\right)^{-1}$$

כך, אנחנו מוצאים את $[T]$ באמצעות $[T]_C^B$; המטריצה $[T]$ מגדירה לנו את T מפורשות: $[T]\,v=T(v)$.

<u>למשל:</u> נתונה העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $B=\{(1,2),(2,1)\},C=\{(1,1,1),(1,0,1),(1,0,0)\}$ בסיסים ונתון ש:

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}1&5\\0&-3\\4&5\end{pmatrix}$$

נמצא את T מפורשות. לפי מה שהסברנו, נזכור ש: $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$.

$$[T]=[I]_{S_2}^{C}[T]_{C}^{B}\left([I]_{S_1}^{B}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\0&-3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1 \cdot 1 - 2 \cdot 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 6 & -3 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$T(x,y) = [T] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (3x+y, 3x-y, x)$$

<u>הקשר בין ההעתקה לבין המטריצה המייצגת שלה:</u>

<u>טענה:</u>

הרכבת העתקות = כפל המטריצות המייצגות.

יהיו U,V,W מרחבים וקטוריים ויהיו B,C,D בסיסים שלהם, בהתאמה.

תהיינה $T: U \to V, S: V \to W$ העתקות ליניאריות. אזי:

$$[S \circ T]_D^B = [S]_D^C [T]_C^B$$

בפרט: $[S \circ T] = [S][T]$.

<u>הוכחה:</u>

צ"ל: $[S]_D^C [T]_C^B [u]_B = [(S \circ T)(u)]_D$. אם כן:

$$[S]_D^C [T]_C^B [u]_B = [S]_D^C [T(u)]_C = [S(T(u))]_D = [(S \circ T)(u)]_D$$

כנדרש.

<u>טענה:</u>

תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית, B,C בסיסים של V,W בהתאמה. T הפיכה אם ורק אם $[T]_C^B$ הפיכה. יותר על כן: $[T^{-1}]_B^C=\left([T]_C^B\right)^{-1}$.

לפני שנוכיח זאת, ניזכר במספר דברים. ראשית, T הפיכה אם קיימת T^{-1} המקיימת: $T^{-1}\circ T=I_V, T\circ T^{-1}=I_W$.

שנית, T הפיכה אם ורק אם T חח"ע ועל. להעתקה ליניארית חח"ע ועל קראנו איזומורפיזם. אם $T:V\to W$ חח"ע ועל, המרחבים V,W נקראים איזומורפיים, ואפשר לסמן: $V\cong W$. במצב כזה, $\dim V=\dim W$.

מצד שני, אם $\dim V=\dim W$, אז T חח"ע אם ורק אם T על אם ורק אם T הפיכה.

<u>הוכחה:</u>

לכיוון הראשון, נניח ש־T הפיכה ונראה ש: $[T]_C^B$ הפיכה.

אם כן, קיימת $T^{-1}:W\to V$ המקיימת: $T\circ T^{-1}=I_W$. לפי הטענה הקודמת:

$$[T]_C^B\left[T^{-1}\right]_B^C=\left[T\circ T^{-1}\right]_C^C=[I_W]_C^C=I$$

כלומר: $[T]_C^B\,[T^{-1}]_B^C=I$. מכיוון שלא נתון מפורשות ש־$[T]_C^B$ ריבועית, אי־אפשר להסיק מכאן שהיא הפיכה. צריך להראות שהיא ריבועית, או שגם: $[T^{-1}]_B^C\,[T]_C^B=I$. אם כן, מכיוון ש־T הפיכה, $\dim V=\dim W$. לכן, $|B|=|C|$. $|B|$ הוא מספר העמודות של $[T]_C^B$. $|C|$ הוא מספר השורות של $[T]_C^B$, מכיוון שעמודות המטריצה הן: $C_i\left([T]_C^B\right)=[T(v_i)]_C$ (v_i איברי B). לכן, מספר השורות של המטריצה המייצגת שווה למספר העמודות, והיא

ריבועית.

מכאן, $[T]_C^B$ אכן הפיכה, ומתקיים: $[T^{-1}]_B^C = \left([T]_C^B\right)^{-1}$.

לכיוון השני, נניח ש-$[T]_C^B$ הפיכה, ונראה ש: T הפיכה.

מכיוון ש-$[T]_C^B$ הפיכה, היא ריבועית, כלומר מספר השורות שווה למספר העמודות. כמו שראינו בהוכחת הכיוון הראשון, פירוש הדבר ש: $|B| = |C|$, ולכן: $\dim V = \dim W$. במצב כזה, T חח"ע אם ורק אם T הפיכה, ולכן מספיק להראות ש-T חח"ע.

אנחנו יודעים ש-T חח"ע אם ורק אם $\ker T = \{0\}$, ולכן מספיק להראות ש-$\ker T = \{0\}$, כלומר להראות שאם: $T(v) = 0$ אז: $v = 0$.

אם כן, יהי $v \in V$ עבורו: $T(v) = 0$. כעת:

$$[T]_C^B [v]_B = [T(v)]_C = [0]_C = 0$$

$[T]_C^B$ הפיכה, ולכן $[v]_B = 0$. לכן, $v = 0$, כנדרש.

כעת, כשאנחנו יודעים ש-T הפיכה ו-T^{-1} קיימת, אפשר להראות כמו בכיוון הקודם שההופכית של $[T]_C^B$ זו $[T^{-1}]_B^C$.

<u>מסקנה:</u> $[T^{-1}] = [T]^{-1}$.

<u>משפט:</u>

תהי $T : V \to W$ העתקה ליניארית, B, C בסיסים של V, W בהתאמה.

נזכור ש: $[X]_B = \{[v]_B | v \in X\}, [Y]_C = \{[v]_C | v \in Y\}$.

מתקיים:

$$N\left([T]_C^B\right) = [\ker T]_B, \quad C\left([T]_C^B\right) = [ImT]_C$$

בפרט:

$$N([T]) = \ker T, \quad C([T]) = ImT$$

<u>מרחב ההעתקות:</u>

נסמן ב־$Hom(V,W)$ את קבוצת כל ההעתקות הליניאריות מ־V ל־W.

זהו מרחב וקטורי (מעל אותו השדה של V,W) עם הפעולות: $(T+S)(v) = T(v)+S(v)\,,\ (\alpha T)(v) = \alpha T(v)$.

היום ראינו שהעתקות ליניאריות ומטריצות הן בעצם אותו הדבר, רק במילים שונות.

פורמלית, קיים $\mathcal{T} : Hom(V,W) \to \mathbb{F}^{m\times n}$ כאשר: $\dim V = m, \dim W = n$ איזומורפיזם, המוגדר ע"י:

$$\mathcal{T}(T) = [T]$$

האיזומורפיזם $\mathcal{T}$ מתאים לכל העתקה את המטריצה המייצגת שלה לפי הבסיסים הסטנדרטיים.

מכאן, אפשר להסיק: $\dim Hom(V,W) = \dim V \cdot \dim W$.

יתר על כן, אנחנו יודעים ש: $\mathbb{F}^{m\times n} \cong \mathbb{F}^{mn}$ (זהו ה"תרגום" של מטריצות לוקטורים) וגם: $\mathbb{F}_n[x] \cong \mathbb{F}^{n+1}$ (שוב, זהו ה"תרגום" של פולינומים לוקטורים), ולכן, בעצם, הכל אצלנו זה וקטורים, רק במילים אחרות.