התכנסות במידה שווה

משפט (דיני)

אם $f_n \searrow f$ בקטע סגור והפונקציות רציפות שם, אז ההתכנסות היא במידה שווה.

הוכחה

בלי הגבלת הכלליות $f \equiv 0$ (ראינו שניתן).

נניח אפוא $f_n \searrow 0$ רציפות בקטע $[a,b]$.

נניח שההתכנסות היא **לא** במידה שווה.

תזכורת

$f_n \to f$ במידה שווה בתחום X: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $k \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k \le n \in \mathbb{N}$:

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ לכל $x \in X$.

$\square$

לכן, קיים $\varepsilon > 0$, כך שלכל $k \in \mathbb{N}$, קיים $k \le n \in \mathbb{N}$ ונקודה $x_k \in X$ כך ש:

$$f_n(x_k) = |f_n(x_k) - 0| \ge \varepsilon$$

$f_n(x)$ יורדת בכל $x \in X$, לכן: $f_k(x_k) \overset{k\le n}{\ge} f_n(x_k) \ge \varepsilon$.

לכן, לכל $k \in \mathbb{N}$, קיים $x_k \in X$ כך ש: $f_k(x_k) \ge \varepsilon$.

$x_k \in [a,b]$ (סדרה חסומה), לכן עפ"י משפט בולצאנו ויירשטרס קיימת לה תת סדרה מתכנסת $x_{m_k} \xrightarrow{k\to\infty} x \in [a,b]$.

$$f_1(x) \xleftarrow[\text{רציפה } f_1]{k\to\infty} f_1\left(\overbrace{x_{m_k}}^{\xrightarrow{k\to\infty} x}\right) \overset{f_1 \ge f_{m_k}}{\ge} f_{m_k}\left(x_{m_k}\right) \ge \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon \le f_1(x)$$

באותו אופן, נקבע $l \in \mathbb{N}$. אז:

$$f_l(x) \xleftarrow[]{\substack{\infty \leftarrow k \\ \text{רציפה } f_l}} f_l\left(\overbrace{x_{m_k}}^{\xrightarrow{k\to\infty} x}\right) \overset{f_l \geq f_{m_k}}{\geq} f_{m_k}\left(x_{m_k}\right) \geq \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon \leq f_l(x)$$

לכן:

$$0 < \varepsilon \leq f_l(x) \xrightarrow{l \to \infty} 0$$

סתירה.

$$\blacksquare$$

הערה

ניתן להסיק מהמקרה שהוכחנו גם את המקרה $f_n \nearrow f$.

מסקנה

יהי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

טור של פונקציות רציפות $0 \leq f_n(x)$ בקטע סגור.

התכונות הבאות שקולות:

1. הטור מתכנס לפונקציה רציפה.
2. הטור מתכנס במידה שווה לפונקציה כלשהי.

הוכחה

$\boxed{2 \Leftarrow 1}$

גבול במידה שווה של פונקציות רציפות הוא פונקציה רציפה.

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$

$$\sum_{k=`1}^{\infty} f_k(x) =: \overbrace{s(x)}^{\text{רציפה}} \nwarrow s_n(x) := \overbrace{\sum_{k=1}^{n} \overbrace{f_k(x)}^{\text{רציפה}}}^{\text{רציפה}}$$

עפ"י משפט דיני, ההתכנסות היא במידה שווה.

■

למה

גבול במידה שווה של פונקציות חסומות בתחום X הוא פונקציה חסומה.

הוכחה

נניח $f \longrightarrow f_n$ במידה שווה בתחום X וכל f_n חסומה.

ניקח $\varepsilon := 1$. קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ לכל $x \in X$.

לכן:

$$|f(x)| - |f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| < 1$$

$f_n(x)$ חסומה, לכן קיים $c \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in X$ מתקיים: $|f_n(x)| < c$.

לכן:

$$\forall x \in X : |f(x)| < 1 + |f_n(x)| < 1 + c$$

$$\Downarrow$$

$f(x)$ חסומה

■

דוגמה

סדרת פונקציות חסומות שמתכנסות מונוטונית לפונקציה שאינה חסומה.

ראינו סדרת פונקציות f_n בקטע $[0,1]$, כך שמתקיים:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}\ , & x \neq 0 \\ 0\ , & x = 0 \end{cases}$$

לכל $x \in [0,1]$, לבסוף $f_n(x) = f(x)$.

f אינה חסומה בקטע $[0,1]$.

עפ״י משפט דיני, f לא יכולה להיות רציפה.

■

למה

גבל במידה שווה של פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ הוא פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

הוכחה

יהיו $f \longrightarrow f_n$ במידה שווה ו – f_n אינטגרביליות בקטע $[a,b]$.

עפ״י משפט לבג (חלק ראשון), לכל $n \in \mathbb{N}$, הפונקציה f_n חסומה, וקבוצת נקודות אי הרציפות של f_n, A_n, היא קבוצה אפסית.

f היא גבול במידה שווה של פונקציות חסומות, לכן עפ״י משפט f חסומה.

לכל:

$$x \notin \overbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \overbrace{A_n}^{\text{אפסית}}}^{\text{אפסית}}$$

כל הפונקציות f_n רציפות ב - x, לכן גם f רציפה ב - x.

לכן, f חסומה ורציפה כמעט בכל הקטע $[a,b]$, לכו עפ״י משפט לבג (חלק שני) אינטגרבילית שם.

■

משפט (אינטגרציה איבר איבר)

יהיו f_n פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ כך ש: $f \longrightarrow f_n$ במידה שווה בקטע $[a,b]$.

אזי:

$$\int_a^b f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)$$

ניסוח אחר

יהיו f_n פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ כך ש:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$$

במידה שווה.

אזי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx$$

הוכחה

הניסוח השני נובע מהניסוח הראשון:

לכל $n \in \mathbb{N}$, נסמן:

$$s_n(x) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

נתון: $s_n(x) \longrightarrow s(x)$ במידה שווה בקטע $[a,b]$.

לכל $n \in \mathbb{N}$, $s_n(x)$ הוא סכום סופי של פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, לכן אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

עפ"י הניסוח הראשון:

$$\int_a^b s_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \overbrace{\int_a^b s(x)}^{\text{אגף ימין}}$$

$$\int_a^b s_n(x) = \int_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, dx$$

$$\int_a^b s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\, dx$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b s_n(x) = \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx}^{\text{אגף שמאל}}$$

לכן:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx$$

$$\square$$

הוכחת הטענה הראשונה:

$f_n \longrightarrow f$ במידה שווה, לכן:

$$0 \xleftarrow{\infty\leftarrow n} \varepsilon_n \coloneqq \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

f גבול במידה שווה של פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, לכן אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)\,dx\right|$$

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b \overbrace{|f_n(x) - f(x)|}^{\le\varepsilon_n}\ dx$$

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b \varepsilon_n\,dx$$

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le \varepsilon_n\cdot(b-a) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)$$

■

דוגמה

התכנסות נקודתית לא מספיקה למשפט.

ראינו סדרת פונקציות f_n בקטע $[0,1]$, כך שמתקיים:

$$f(x) \equiv 0$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 0\,dx = 0$$

$$\int_0^2 f_n(x)\,dx \overset{S_\Delta}{=} 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1 \neq 0$$

$f_n \to f$ לא במידה שווה, לכן התכנסות נקודתית אינה מספיקה.

■

משפט (גזירה איבר איבר)

נניח שהתכונות הבאות מתקיימות בקטע סגור $[a,b]$.

1. f_n פונקציות גזירות בקטע $[a,b]$.
2. הפונקציה $f_n(x)$ מתכנסת לפחות בנקודה אחת x_0.
3. הפונקציה f_n' במידה שווה.

אזי:

1. קיימת פונקציה f כך ש: $f_n \longrightarrow f$ במידה שווה.
2. $f_n' \longrightarrow f'$ במידה שווה.

<u>ניסוח עבור טורים</u>

נניח שהתכונות הבאות מתקיימות בקטע הסגור $[a,b]$.

1. f_n פונקציות גזירות בקטע $[a,b]$.
2. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס לפחות בנקודה אחת x_0.
3. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ מתכנס במידה שווה.

אזי:

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה.
2. מתקיים: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

הוכחה

בהרצאה הבאה.

דוגמה

ההנחה שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס לפחות בנקודה אחת הכרחית.

נתבונן בטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} + 1\right)$$

מתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

לכל $c \in [0,1]$, לכל $x \in [-c, c]$ מתקיים:

$$\left|\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right| \leq \frac{c^{n-1}}{(n-1)!}$$

לכן עפ"י מבחן ויירשטרס, טור הנגזרות מתכנס במידה שווה בכל קטע $[-c, c]$.

אולם:

$$\frac{x^n}{n!} + 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1 \neq 0$$

לכן, הטור המקורי אינו מתכנס, לכן לא מתכנס במידה שווה.

■