נכתב על ידי נועם יערי

הערה

$n_p = 1 \iff$ יש תת חבורת p – סילו יחידה $\iff$ תת חבורה p – סילו היא נורמלית

דוגמא

$$|G| = 24 = 2^3 \cdot 3$$
$$n_2 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2), \qquad n_2|24$$
$$\Longrightarrow n_2|3$$
$$\Longrightarrow n_2 = 1{,}3$$

$$n_3 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 3), \qquad n_3|24$$
$$\Longrightarrow n_3|8$$
$$\Longrightarrow n_3 = 1{,}4$$

נתבונן במקרה $G = S_4$.

תתי חבורות 3 – סילו: למשל $\mathbb{Z}_3 \cong \langle(1 \quad 2 \quad 3)\rangle$.

לכל i, $p_i = \langle(i+1 \quad i+2 \quad i+3)\rangle$ תתי חבורות 3 – סילו.

תת חבורה 2 – סילו: $D_4 = \langle(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4), (1 \quad 4)(2 \quad 3)\rangle$.

יש שלוש תתי חבורות 2 – סילו, איזומורפיות.

דוגמא

$$|G| = 72 = 2^3 \cdot 3^2$$

מה אפשר להגיד על G ?

$$n_2 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2), \qquad n_3 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$$
$$n_2|3^2 \qquad n_3|2^3$$
$$n_2 = 1{,}3{,}9 \qquad n_3 = 1{,}4$$

נניח $[G : N_G(P)] = n_3 = 4$. נפעיל את העידון של משפט קיילי ונקבל שיש הומומורפיזם $G \to S_4$ כך שמתקיים:

$$K := \ker \subseteq N_G(P), \qquad {}^{G}\!/_{K} \hookrightarrow S_4 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|G|}{|K|} \Big| \, 24 \, \Longrightarrow |K| \big| 3$$

נבחר $K_0 \leq K$ מסדר 3, כעת $K_0P = PK_0$ כי $N_G(p) \lhd p$ אבל $|P| \mid |PK_0|$, לכן $K_0 \subseteq P$.

לכן יש תת חבורה K_0 מסדר 3 השווה לחיתוך של כל תתי חבורות 3 – סילו.

לכן $K_0 \lhd G$.

נקבל שני מקרים:

1. $G/K \cong S_4$, כלומר $K = K_0$.
2. $\left|K/K_0\right| = 2$ ואז $G/K \cong A_4$.

תזכורת

אם P חבורת $p-$, לכל $H \lneqq P$ מתקיים $H \subset N_G(H)$.

טענה

תהי P תת חבורת סילו של G.

$$N_G\left(N_G(P)\right) = N_G(P)$$

הוכחה

הכיוון $\supseteq$ טריוויאלי.

הכיוון $\subseteq$:

יהי $x \in N_G\left(N_G(P)\right)$. כלומר:

$$xPx^{-1} \subseteq N_G(xPx^{-1}) = xN_G(P)x^{-1} = N_G(P)$$

אבל המנרמל של p אינו יכול להכיל תת חבורת p – סילו אחרת ולכן:

$$xPx^{-1} = P \Longrightarrow x \in N_G(P)$$

משפט

תהי P תת חבורת סילו של G.

לכל $N_G(P) \subseteq H$ מתקיים:

$$N_G(H) = H$$

הוכחה

ברור שמתקיים $H \subseteq N_G(H)$. נניח שמתקיים $x \in N_G(H)$.

כלומר:

$$xPx^{-1} \subseteq N_G(xPx^{-1}) = xN_G(P)x^{-1} \subseteq xHx^{-1} = H$$

לכן:

$$P, xPx^{-1} \subseteq H$$

לכן שתיהן חבורות p – סילו של H.

לפי משפט סילו השני, הן צמודות ב – H, כלומר יש $h \in H$ כך ש - $xPx^{-1} = hPh^{-1}$.

כעת, $(h^{-1}x)P(h^{-1}x)^{-1} = P$.

כלומר מתקיים:

$$h^{-1}x \in N_G(P) \subseteq H$$
$$\Longrightarrow x \in hH = H$$

דוגמא תרגיל

הוכח שכל חבורה מסדר מסוים אינה פשוטה.

דוגמא

$$|G| = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$n_2 = 1,3,5,15$$
$$n_3 = 1,10$$
$$n_5 = 1,6$$

אם G פשוטה ויש לה תת חבורה מאינדקס m, אז $G \hookrightarrow S_m$.

אם ל$-G$ יש תת חבורה מאינדקס m אבל $|G| \nmid m!$ אז G אינה פשוטה.

אם G פשוטה - $n_i \neq 1$, $n_2 \neq 3$
ובגלל שלחבורה S_5 אין תת חבורה מסדר 30, $n_2 \neq 5$.

אבל אם $n_2 = 15, n_3 = 10, n_5 = 6$ יש 24 מסדר 5, 20 מסדר 3 ו - 15 איברים מסדר 2. זה יותר מ - $|G|$ לכן זה לא יתכן.