חבורות אבליות סופיות:

תזכורת:

אם $(n,m)=1$ אז $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_m\cong\mathbb{Z}_{nm}$

כל חבורה אבלית סופית היא מכפלה של חבורות אבליות שהסדר שלהן הוא p^k

וכל החבורות האבליות מסדר p^m הן איזומורפיות ל: $\mathbb{Z}_{p^{i_1}}\times\dots\times\mathbb{Z}_{p^{i_t}}$

כאשר $i_1+\dots+i_t=k$

תרגיל:

מצאו את כל החבורות האבליות מסדר $2^2\cdot3^2\cdot5$ עד כדי איזו'

פתרון:

$$\mathbb{Z}_{180}\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5$$

$$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5$$

תרגיל:

מהן מחלקות האיזומורפיזם

1. $\mathbb{Z}_{180}\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_5$

1. $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{45}\cong\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_5$

2. $\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{18}\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_9$

1. $\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_{20}=\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_5$

3. $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{30}=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5$

3. $\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{15}=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5$

2. $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{90}\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_9$

תת חבורת הקומוטטורים: (חבורת הנגזרת)

הגדרה: תהי G חבורה, $a,b\in G$. הקומוטטור של a ו-b הוא:

$[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$

$[a,b]^{-1}\overset{?}{=}(aba^{-1}b^{-1})=[b,a]$

$G'=\langle [a,b]\mid a,b\in G\rangle=$ מכפלות של קומוטטורים

תכונות:

1) $G' \trianglelefteq G$

2) G אבלית $\Longleftrightarrow$ $G'=\{e\}$

3) $H \le G \Rightarrow H' \le G'$

4) G/G' אבלית

5) אם יש N כך ש G/N אבלית אז $G' \le N$

הגדרה: G נקראת מושלמת אם $G=G'$

דוגמא:

$n\ge 5$, נמצא את S_n'. S_n לא אבלית ולכן $S_n' \ne \{e\}$

נשים לב ש $sign(a)=sign(a^{-1})$ ולכן $sign[a,b]=sign(a)\cdot sign(b) sign(a) sign(b)=1$

אז $S_n' \le A_n$ ולכן $S_n' = A_n$

דרך נוספת: $\underbrace{S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2}_{\text{אבלית}}$ ולכן $S_n' \le A_n$

הערה: נכון גם עבור $n=3,4$

תרגיל:

חשבו את $(D_4)'$

פתרון:

$(D_4)' \ne \{e\}$ כי D_4 אינה אבלית. $\langle \sigma \rangle \trianglelefteq D_4 \Rightarrow D_4/\langle\sigma\rangle \cong \mathbb{Z}_2$

לכן $D_4' \le \langle \sigma \rangle$

$|D_4/\langle\sigma^2\rangle| = 4$ אבלית לכן $G' \le \langle \sigma^2 \rangle$ ולכן $G' = \langle \sigma^2 \rangle$

תרגיל:

הוכיחו שכל חבורת-p אינה מושלמת

פתרון:

$|G|=p^n$ (עבור חבורה אבלית הנגזרת היא $\{e\}$, נניח G לא אבלית)

$\varphi: G\to H$ אפי', ו-H אבלית. אז $G/\ker\varphi \cong H$ ולכן $G'\le \ker\varphi$.

כלומר, אם $G=G'$, אז המנה האבלית היחידה של G היא $\{e\}$.

אם $G\neq G'$, אז $G/G'\neq\{e\}$ אבלית

מסקנה: G מושלמת $\Longleftrightarrow$ המנה האבלית היחידה של G היא הטריוויאלית

מספיק להוכיח שיש לG מנה אבלית לא טריוויאלית. באינדוקציה על n

אם $n=1$: אז $G=|P|$, G אבלית. G היא מנה אבלית של עצמה.

נניח נכונות ל$k<n$ ונוכיח עבור n:

$G \trianglerighteq Z(G)\neq\{e\}$. $|G/Z(G)|=p^t$ $t<n$ לכן $G'\neq G$

$$G \to G/Z(G) \xrightarrow[\text{אפי'}]{} H$$

מההנחה של האינדוקציה

תרגיל:

תהי G חבורה מסדר 28.

א) הוכיחו שיש לה תת חבורה נורמלית $P\trianglelefteq G$ מסדר 7

ב) אם G לא אבלית, אז $|G'|=7$

פתרון:

א) $28=2^2\cdot 7$ $n_7|4 \wedge n_7=1 \bmod 7 \Rightarrow n_7=1$. ניקח את P להיות חבורת 7-סילו

ב) $|G/P|=4$ אבלית. ולכן $\{e\}\neq G'\le P$ מסדר 7 $\Rightarrow G'=P$

סדרות תת נורמליות:

סדרה תת נורמלית של G היא סדרה של תת חבורות

$\{e\} = G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$

כך ש $G_i \triangleleft G_{i+1}$

עידון של סדרה תת נורמלית הוא: $\{e\} = G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft \dots \triangleleft G_i \triangleleft G_i' \triangleleft G_{i+1} \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$

$(G_i' \neq G_{i+1} \ , \ G_i' \neq G_i)$

הגדרה: סדרה תת נורמלית נקראת סדרת הרכב אם אי אפשר לעדן אותה

(שקול ל- G_{i+1}/G_i פשוטה)

המנות G_{i+1}/G_i נקראות הגורמים של סדרת ההרכב

משפט:

לכל סדרת הרכב של G, יש את אותם גורמים

דוגמאות:

1) S_3: $\{e\} \overset{\mathbb{Z}_3}{\triangleleft} A_3 \overset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} S_3$

2) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$: $\{e\} \times \{e\} \overset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} \{e\} \times 2\mathbb{Z}_4 \overset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} \{e\} \times \mathbb{Z}_4 \overset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$: $\{e\} \times \{e\} \underset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} \mathbb{Z}_2 \times \{0\} \underset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} \mathbb{Z}_2 \times 2\mathbb{Z}_4 \underset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

3) נמצא את כל סדרות ההרכב (והגורמים) של $\mathbb{Z}_{12}$. $\mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$

$\{e\} \times \{e\} \overset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} \{e\} \times 2\mathbb{Z}_4 \overset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} \{e\} \times \mathbb{Z}_4 \overset{\mathbb{Z}_3}{\triangleleft} \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$

$\{e\} \times \{e\} \overset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} \{e\} \times 2\mathbb{Z}_4 \overset{\mathbb{Z}_3}{\triangleleft} \mathbb{Z}_3 \times 2\mathbb{Z}_4 \overset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$

$\{e\} \times \{e\} \overset{\mathbb{Z}_3}{\triangleleft} \mathbb{Z}_3 \times 2\mathbb{Z}_4 \overset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} \mathbb{Z}_3 \times 2\mathbb{Z}_4 \overset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$

חבורות פתירות:

הגדרה: G נקראת פתירה אם יש לה סדרה תת נורמלית שכל המנות בה אבליות.

משפט:

G פתירה $\Leftrightarrow$ כל הגורמים של סדרות ההרכב שלה הם אבליים

דוגמאות:

1) כל חבורה אבלית היא פתירה

$\{e\} \triangleleft \overset{G}{} G$ תת סדרה נורמלית, לא בהכרח הרכב

2) D_n פתירה $\qquad \{e\} \overset{\mathbb{Z}_n}{\triangleleft} \langle r \rangle \overset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} D_n$

3) $H_p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c \in \mathbb{Z}_p \right\}$. נראה ש H_p פתירה.

$|H_p| = p^3$. קיימת תת חבורה מסדר p נורמלית, $Z(H_p)$

$\underbrace{\{e\} \triangleleft Z(H_p)}_{\mathbb{Z}_p} \triangleleft H_p$

מסדר p^2 ולכן אבלית

תרגיל:

כל חבורה מסדר pq, $p \neq q$ היא פתירה

פתרון:

בלי הגבלת הכלליות $p<q$. $n_q \equiv 1 \mod p$, $n_q | p$ לכן $n_q = 1$

יש תת חבורה q-סילו אחת והיא נורמלית. נקרא לה Q $\qquad \underbrace{\{e\} \triangleleft Q}_{\mathbb{Z}_q} \underbrace{\triangleleft G}_{\mathbb{Z}_p}$

משפט:

אם $N \triangleleft G$ כך ש:

(1) N פתירה, (2) G/N פתירה

אזי G פתירה

תרגיל:

כל חבורת p היא פתירה

הוכחה:

$n=1$: אבלית לכן פתירה.

נניח לכל $k<n$.

עבור n: אם G אבלית היא פתירה

אחרת $Z(G)\trianglelefteq G$, $\{e\}\neq Z(G)\neq G$

$k<n$: $|Z(G)|=p^k$, $t<n$ $|G/Z(G)|=p^t$ לכן שתיהן פתירות

תרגיל:

הוכיח שכל חבורה מסדר $1089=3^2\cdot 11^2$ היא פתירה

פתרון:

$n_{11}\equiv 1 \mod 11$ $n_{11}|9$, $n_{11}=1$ חבורת 11 סילו נורמלית

נקרא לה Q Q פתירה כי אבלית

G/Q פתירה כי מסדר 9 ולכן אבלית

תרגיל:

הוכיחו ש $|G|=3^2\cdot 11^3$ אז G פתירה

פתרון:

Q חבורת 11 סילו נורמלית. Q פתירה כי חבורת p

G/Q פתירה כי אבלית

הגדרה: סדרת הנגזרות של G $G^{(1)}=G'=[G,G]$

$G^{k+1}=(G^k)'=[G^k,G^k]$

משפט:

G פתירה $\iff$ קיים t כך ש $G^{(t)}=\{e\}$

תרגיל:

נחשב את סדרת הנגזרות של D_3

פתרון:

$D_3'' = \langle \sigma \rangle' = \{e\}, D_3' = \langle \sigma \rangle$

תרגיל:

תהי G חבורה פתירה. הוכיחו שיש לה תת חבורה נורמלית אבלית לא $\{e\}$

פתרון

$G^{(t)} = \{e\}$

$(G^{(t-1)})' = \{e\}$

$G^{(t-1)}$ אבלית