שיטות לפענוח המבנה של חבורה מתוך הסדר שלה

1. משפטי סילו.
2. ספירת איברים.
3. העידון של משפט קיילי.
4. משפט ${}^{N}/_{C}$.
5. מרכזים ומנרמלים.

תרגיל

הוכיחו כי כל חבורה מסדר 45 היא אבלית.

פתרון

מתקיים:

$$45 = 3^2 \cdot 5$$

לכן:

$$\begin{aligned} n_3 &= 1 \\ n_5 &= 1 \end{aligned}$$

לכן, קיימת תת-חבורה נורמלית $\mathcal{P}_3$ מסדר 9 ותת-חבורה נורמלית $\mathcal{P}_5$ מסדר 5.

לכן:

$$\begin{aligned} G &\cong \mathcal{P}_3 \times \mathcal{P}_5 \\ &\cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{45} \\ \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5 \end{cases} \end{aligned}$$

לכן, G אבלית.

■

משפט

כל החבורות הלא אבליות מסדר קטן מ – 240 אינן פשוטות, למעט A_5 מסדר 60 ו - $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$ מסדר 168.

תזכורת (מכפלה ישרה)

$$G \cong K \times Q$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} K &\lhd G \\ Q &\lhd G \\ K \cap Q &= 1 \\ KQ &= G \end{aligned}$$

הגדרה

תהי G חבורה.

תהיינה $Q, K \leq G$ תת-חבורות.

G היא **מכפלה ישרה למחצה** של Q ב $-K$ אם K, Q משלימות ו - $K \lhd G$.

נסמן :

$$G \cong K \rtimes Q$$

דוגמה

מתקיים :

$$\mathrm{S}_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$$

באופן כללי :

$$\mathrm{S}_n \cong \mathrm{A}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$$

הערה

תהיינה K, Q חבורות.

נתון כי $G \cong K \rtimes Q$.

נרצה לשחזר את לוח הכפל של G מתוך לוחות הכפל של K, Q.

לכל g, g', מתקיים :

$$g = kq$$
$$g' = k'q'$$

נרצה לרשום:

$$gg' = k''q''$$

מתקיים:

$$kq \cdot k'q' = k(qk'q^{-1}) \cdot qq'$$

הנורמליות של K משרה פעולה של Q על K.

לכן:

המבנה של $K \rtimes Q$

$$\Updownarrow$$

(K, Q, פעולת Q על K)

הגדרה

תהי G חבורה.

תהיינה $Q, K \leq G$ תת-חבורות.

חבורה G היא **הרחבה** של Q ב $-K$ אם $K \lhd G$ ו - $G/_K \cong Q$.

לחילופין, קיימת **סדרה מדויקת קצרה**:

$$1 \to K \hookrightarrow G \twoheadrightarrow Q \to 1$$

הערה

תהיינה K, Q חבורות.

נתון כי G היא הרחבה של Q ב $-K$.

נרצה לשחזר את G מ - K, Q.

דוגמה

מכפלה ישרה למחצה היא הרחבה.

$$1 \to K \hookrightarrow K \rtimes Q \twoheadrightarrow Q \to 1$$

דוגמה

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \to 1$$
$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 1$$

הערה

K פועלת על עצמה על-ידי הצמדה אם ורק אם K אבלית.

הערה

כאשר K אבלית, כל הרחבה משרה פעולה של Q על K.

הערה

תהי Q חבורה הפועלת על חבורה אבלית K.

אזי, קיימות חבורות קוהומולוגיה:

$$H^i(Q,K), \qquad 0 \le i$$

הערה

נתונה חבורה Q הפועלת על חבורה אבלית K.

$$G \cong K \times Q$$

$$^{1}\downarrow$$

$$^{2}G \cong K \rtimes Q$$

$$^{3}\downarrow$$

$$G \cong K \rtimes Q$$

$$^{4}\downarrow$$

$$1 \to K \hookrightarrow G \twoheadrightarrow Q \to 1$$

---

[1] החץ ההפוך כאשר $H^0(Q,K)$.
[2] כאשר כל המשלימים של K צמודים זה לזה.
[3] החץ ההפוך כאשר $H^1(Q,K) = 0$.
[4] החץ ההפוך כאשר $H^2(Q,K) = 0$.

הערה

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & K & \to & G & \to & Q & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & \operatorname{Inn} K & \to & \operatorname{Aut} K & \to & \operatorname{Out} K & \to & 1 \end{array}$$

לכן, כל הרחבה מגדירה "פעולה חיצונית":

$$\alpha: \quad Q \quad \to \quad \operatorname{Out} K$$

הערה

נתונה חבורה Q עם פעולה חיצונית α על חבורה K, המשרה פעולה על המרכז $Z(K)$.

אם $H^3\big(Q, Z(K)\big) = 0$, אז קיימת הרחבה:

$$1 \quad \to \quad K \quad \hookrightarrow \quad G \quad \twoheadrightarrow \quad Q \quad \to \quad 1$$

המממשת את הפעולה החיצונית α.

דוגמה

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \mathrm{A}_4 & \to & \mathrm{S}_4 & \to & \mathbb{Z}_2 & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & \mathrm{A}_4 & \to & \mathrm{S}_4 & \to & \mathbb{Z}_2 & \to & 1 \end{array}$$

דוגמה

$$1 \quad \to \quad \mathrm{K}_4 \quad \to \quad \mathrm{S}_4 \quad \to \quad \mathrm{S}_3 \quad \to \quad 1$$

תזכורת

לכל $n \neq 2,6$, מתקיים:

$$\operatorname{Aut} \mathrm{A}_n \quad = \quad \mathrm{S}_n$$