# פתרון תרגיל 6 טופולוגיה תשע"ז

1. $\tau=\{O\subseteq X\,|\,|O^c|\leq\aleph_0\}\cup\{\emptyset\}$.

(א) נוכיח שהתכונות הנדרשות מטופולוגיה מתקיימות.

i. $\emptyset\in\tau$, ומכיוון ש: $\mathbb{R}^c=\emptyset$, גם $\mathbb{R}\in\tau$.

ii. תהיינה $\{O_i\}_{i\in I}\subseteq\tau$.
אם לכל $i\in I$ מתקיים $O_i=\emptyset$, גם $\cup O_i=\emptyset$ ולכן $\cup O_i\in\tau$.
אם קיים $j\in I$ עבורו $O_j\neq\emptyset$, $\left|O_j^c\right|\leq\aleph_0$. $O_j\subseteq\cup O_i$, ולכן $(\cup O_i)^c\subseteq O_j^c$. לכן:

$$\left|(\cup O_i)^c\right|\leq\left|O_j^c\right|\leq\aleph_0$$

ולכן גם $\cup O_i\in\tau$.

iii. תהיינה $\{O_i\}_{i=1}^n\subseteq\tau$.
אם קיים $i$ עבורו מתקיים $O_i=\emptyset$, גם $\cap O_i=\emptyset$ ולכן $\cap O_i\in\tau$.
אם לכל $j$ מתקיים $O_j\neq\emptyset$, $\left|O_j^c\right|\leq\aleph_0$. לכן גם:

$$\left|(\cap O_i)^c\right|=\left|\cup O_i^c\right|\leq\sum_{i=1}^n\left|O_i^c\right|\leq\aleph_0$$

מכיוון שזהו סכום סופי. לכן גם $\cap O_i\in\tau$.

(ב) תהי $\{x_n\}$ סדרה המתכנסת ל-$x$. נתבונן בקבוצה:

$$U=(\mathbb{R}\backslash\{x_n\})\cup\{x\}$$

$U^c=\{x_n\}\setminus\{x\}$ ולכן $|U^c|\leq\aleph_0$, כלומר $U$ פתוחה. $x\in U$ ולכן $U$ סביבה פתוחה של $x$.
מהגדרת התכנסות, קיים $n_0$ כך שלכל $n\geq n_0$ $x_n\in U$. מהגדרת $U$ הדבר אפשרי רק אם לכל $n\geq n_0$, $x_n=x$.
לכן, סדרה מתכנסת במרחב היא סדרה מתכנסת לבסוף.
אם כן, תהי $x\in scl\left(A\right)$. מההגדרה קיימת $A\supseteq\{x_n\}$ המתכנסת ל-$x$. לפי מה שהסברנו, גם $x\in A$ ולכן $scl\left(A\right)\subseteq A$.
$scl\left(A\right)\subseteq A$ ולכן $scl\left(A\right)=A$.

(ג) נתבונן בקבוצה $A=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. זו קבוצה שאינה סגורה (המשלים לא פתוחה). לכן $cl\left(A\right)\neq A$.

(ד) לפי הסעיפים הקודמים, $A=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ מקיימת $scl\left(A\right)=A$ וגם $cl\left(A\right)\neq A$.
במרחב מטרי, לכל $A$ מתקיים: $cl\left(A\right)=scl\left(A\right)$. לכן המרחב שלנו לא מטריזבילי.

2. נזכור שקבוצה $A$היא צפופה אם ורק אם לכל $V \subseteq X$ פתוחה, $A \cap V \neq \emptyset$.

(א) נניח בשלילה שקיים $u \in U$ כך ש: $u \notin cl\left(A \cap U\right)$. לכן, קיימת סביבה $O$ של $u$ עבורה $O \cap A \cap U$.
נשים לב שגם $U$ סביבה של $u$, ולכן גם $V = O \cap U$ סביבה של $u$, ומקיימת $V \cap A = \emptyset$, בסתירה לכך ש$A-$ צפופה.

(ב) מסעיף קודם, $cl\left(A \cap U\right)$ מכילה את $U$. היא סגורה ולכן $cl\left(U\right) \subseteq cl\left(A \cap U\right)$.
מצד שני, $A \cap U \subseteq U$ ולכן $cl\left(A \cap U\right) \subseteq cl\left(U\right)$. מהכלה דו-כיוונית נקבל את הדרוש.

3. נשים לב שאם מורידים מ$X-$ או מ$Z-$ נקודה כלשהית הם נותרים קשירים. לעומת זאת, אם נוריד מ$Y-$ את נקודת ההשקה בין המעגלים נקבל מרחב לא קשיר. לכן $X, Z$ אינם הומיאומורפיים ל$Y-$.

4. ראשית נוכיח שהמרחב רגולרי.
אם כן, תהי $A \subseteq X$ סגורה ותהי $x \in X \backslash A$. מכיוון שהמרחב הוא האוסדורף, לכל $y \in A$ קיימות סביבות $U_y, V_y$ של $x, y$ בהתאמה שחיתוכן ריק: $U_y \cap V_y = \emptyset$.
מכיוון שהקבוצה $A$ היא תת-קבוצה סגורה של $X$ הקומפקטי היא גם קומפקטית, ומכיוון שמתקיים:

$$A \subseteq \bigcup_{y \in A} V_y$$

נקבל (מהקומפקטיות של $A$) שקיימים $y_1, \ldots, y_n \in A$ עבורם: $A \subseteq \bigcup V_{y_i}$ כאשר $1 \leq i \leq n$.
כעת, נסמן:

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}, V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

שתי הקבוצות הן פתוחות (איחוד וחיתוך סופי של פתוחות), $U$ היא סביבה של $x$ ובנוסף:

$$U \cap V = \emptyset$$

והן מפרידות בין הקבוצה הסגורה $A$ והאיבר $x$. לכן המרחב רגולרי.

*החיתוך ריק מכיוון שמתקיים:

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}\right) \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left(U_{y_i} \cap V_{y_i}\right) = \emptyset$$

כעת, נראה שהמרחב נורמלי. תהיינה $A, B \subseteq X$ סגורות וזרות.
נתבונן באיבר $x \in A$. לכן $x \notin B$.
מכיוון שהמרחב רגולרי, קיימות קבוצות פתוחות $U_x, V_x$ זרות המקיימות: $x \in U_x, B \subseteq V_x$.
כעת, האוסף $\{U_x\}_{x \in A}$ הוא כיסוי פתוח של $A$ ולכן קיימים $x_1, \ldots, x_n \in A$ עבורם:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$$

נסמן:

$$U=\bigcup_{i=1}^{n}U_{x_I},V=\bigcap_{i=1}^{n}V_{y_i}$$

אלו קבוצות פתוחות וזרות המקיימות $A\subseteq U,B\subseteq V$. הפרדנו בין קבוצות סגורות ולכן המרחב נורמלי.