בס"ד

מועד א', ס"א, תשע"ו — פתרונות.

1. א. נניח שהתנאי "δ,ε" לא מתקיים.

אזי קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta_n=\frac{1}{2^n}$ $(n\in\mathbb{N})$, קיימת $E_n\in\mathcal{A}$ שעבורה $\mu(E_n)<\frac{1}{2^n}$ ו- $\nu(E_n)\geq\varepsilon$.

נגדיר $E=\limsup E_n \doteq \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq n}E_k\in\mathcal{A}$.

מתת-אדיטיביות-σ של המידה μ $\Leftarrow$ אם נסמן $F_n\doteq\bigcup_{k\geq n}E_k$

$$\mu(F_n)\leq\sum_{k\geq n}\mu(E_k)<\sum_{k\geq n}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\right)=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

כיון ש $E\subseteq F_n$ לכל n, מונוטוניות המידה μ גוררת ש

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad (0\leq)\ \mu(E)\leq\frac{1}{2^{n-1}}$$

ולכן $\mu(E)=0$. (1)

כיון ש-ν מידה סופית ו $F_{n+1}\subseteq F_n$ לכל n,

$$\nu(E)=\nu\left(\bigcap_n F_n\right)=\lim\nu(F_n)$$

אבל $F_n\supseteq E_n$, ולכן $\nu(F_n)\geq\nu(E_n)\geq\varepsilon$.

לכן $\nu(E)\geq\varepsilon$ (2)

מ-(1) ו-(2) נובע ש-ν אינה רציפה לחלוטין ביחס ל-μ.

מאידך, אם התנאי "δ,ε" מתקיים, אזי לכל $\varepsilon>0$, אם $\delta>0$ מתאים לו כמו בתנאי, ואם $E\in\mathcal{A}$ מקיימת $\mu(E)=0$, הרי $\delta>0=\mu(E)$, ולכן $\nu(E)<\varepsilon$. כיון שזה נכון לכל $\varepsilon>0$, הרי $\nu(E)=0$. זה מראה ש-ν רציפה לחלוטין ביחס ל-μ.

בסכום: $\nu\ll\mu$ אם ורק אם התנאי "δ,ε" מתקיים.

ב. אם $\|f\|_1=0$ (הנורמה ב-$L^1([0,1])$), טריוויאלי, נניח לכן ש $\|f\|_1>0$.

נגדיר $\nu(E)=\int_E |f|\,dm$. אזי ν מידה (חיובית) רציפה בהחלט ביחס ל-m.

לפי חלק א' עם $\varepsilon=\frac{1}{2016}$, קיים $\delta>0$ כך ש

$$\int_E |f|\,dm < \frac{1}{2016} \qquad (1)$$

כאשר E מדידה-לבג ב $[0,1]$ עם $\underline{m(E)<\delta}$.

<u>נבחר</u> $M>\frac{\|f\|_1}{\delta}$. אזי

$$M\,m([f>M])=\int_{[f>M]} M\,dm \le \int_{[f>M]} f\,dm \le \|f\|_1$$

ולכן

$$m([f>M]) \le \frac{\|f\|_1}{M} < \delta$$

נקבל עתה מ-(1) (עם $E\doteq[f>M]$) ש

$$\int_{[f>M]} f\,dm \left(=\int_{[f>M]} |f|\,dm\right) < \frac{1}{2016}.$$

[כי $f>0$ על הקבוצה הנדונה!]

2. א. האינטגרנד נשלט ע"י $\frac{1}{x^2}\in L^1([1,\infty))$ ושואף ל-0 כב"מ (פרט לנקודות $\frac{\pi}{2}+k\pi$ עם $k\in\mathbb{Z}$, המהוות קב' בת-מניה, ולכן m-אפסה!).
לפי משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג, הגבול הוא $\underline{\underline{0}}$.

ב. האינטגרנד נשלט ע"י $\cos x\in L^1([0,\frac{\pi}{2}])$, לכל סדרה $t_n\to 0$, סדרת האינטגרנדים המתאימה שואפת ל-$\cos x$. לפי משפט ההתכנסות הנשלטת, האינטגרלים המתאימים שואפים ל $\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=\underline{1}$. לכן (בהיות הדבר נכון לכל סדרה $\{t_n\}$ כנ"ל), הגבול המבוקש הוא $\underline{\underline{1}}$.

ג. האינטגרנד נשלט ע"י $\frac{1}{1+x^2}\in L^1(\mathbb{R})$, ושואף ל $\frac{1}{1+x^2}$. לכן הגבול הוא $\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{1+x^2}=\underline{\underline{\pi}}$.

א. ידוע שקיימת קבוצה לא מדידה-לבג E על $\mathbb{R}$.

נגדיר $f = I_E - I_{E^c}$.

אזי $[f=1]=E$ לא מדידה, ולכן f לא מדידה.

אולם $|f|=1$ (קבועה!) על $\mathbb{R}$, ולכן מדידה.

דוגמא זו מראה שמדידות $|f|$ אינה גוררת מדידות f בד"כ.

ב. אם $m^*(E)=\infty$, נקח $G=\mathbb{R}$, קב' פתוחה, ולכן מטיפוס G_δ, $E\subseteq G$, ו- $m^*(G)=\infty=m^*(E)$.

ולכן אפשר להניח בה"כ $m^*(E)<\infty$.

נשתמש בסימונים של ההרצאה: $\mathcal{C}$ הסמי-אלגברה $\{\emptyset,(a,b],(-\infty,b],(a,\infty)\mid \forall a,b\in\mathbb{R}\}$,

m הסמי-מידה $m((a,b])=b-a$ וכו', וגם המידה על האלגברה $\mathbb{A}$ הנוצרת ע"י $\mathcal{C}$.

לכל $n\in\mathbb{N}$, קיים $\mathbb{A}$-כסוי $\{A_k^n\}$ של E כך ש

$$(1)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k^n) < m^*(E)+\frac{1}{n}$$

בה"כ, $\{A_k^n\}$ הוא $\mathcal{C}$-כסוי של E, כי כל קבוצה ב-$\mathbb{A}$ היא איחוד סופי זר של קבוצות מתוך $\mathcal{C}$, ומידתה היא סכום המידות המתאימות (כך שצד שמאל ב(1) נשאר ללא שינוי).

כיוון ש $m^*(E)<\infty$, אפשר גם להניח שה-A_k^n הם קטעים מהצורה $(a,b]$, וקטע כזה מוכל בקטע הפתוח $B_k^n \doteq (a, b+\frac{1}{n2^k})$.

נגדיר $G_n=\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^n$. G_n קב' פתוחה, $E\subseteq G_n$ לכל n, ולפי (1)

$$m^*(G_n) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k^n) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k^n)+\frac{1}{n} < m^*(E)+\frac{2}{n}$$

נגדיר $G=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. אזי G קב' מטיפוס G_δ, $E\subseteq G$, ולכל n

$$m^*(E)\le m^*(G)\le m^*(G_n)<m^*(E)+\frac{2}{n} \Longleftarrow m^*(E)=m^*(G).$$