תרגול כיתה 7

1. מצא דוגמא לקבוצה X ושתי סיגמא אלגברות S_1 ו S_2, כל אחת מכילה תתי-קבוצות של X כך ש $S_1 \cup S_2$ אינה סיגמא אלגברה.

פתרון: ניקח $X=\{1,2,3\}$, $S_1=\{\{1\},\{2,3\},\varnothing,\{1,2,3\}\}$ ו $S_2=\{\{1,2\},\{3\},\varnothing,\{1,2,3\}\}$.
קל לראות כי S_1 ו S_2 הינן סיגמא אלגברות ואילו $S_1 \cup S_2=\{\{1,2\},\{3,\},\{1\},\{2,3\},\varnothing,\{1,2,3,4\}\}$ אינה סיגמא אלגברה שכן $\{1,2\}\cap\{2,3\}\notin S_1\cup S_2$.

2. נניח כי $S_1 \subset S_2 \subseteq \cdots$ הינן סיגמא אלגברות המכילות תתי-קבוצות של X. האם $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ הינה סיגמא אלגברה? אם לא תן דוגמא נגדית.

פתרון: נבחר את X להיות כל הסדרות המקבלות 0 או 1 כלומר $X=\left\{\left(x_i\right)_{i=1}^{\infty} : x_i=0 \vee x_i=1\right\}$. נגדיר את S_1 להיות הסיגמא אלגברה הנוצרת מהקבוצה $A_1=\left\{\{x_i\}:\{x_i\}\in X, x_1=1\right\}$. נגדיר את S_2 להיות הסיגמא אלגברה הנוצרת מ A_1 ו $A_2=\left\{\{x_i\}:\{x_i\}\in X, x_2=1\right\}$. באופן איטרטיבי נגדיר את S_{n+1} להיות הסיגמא אלגברה הנוצרת מכל הקבוצות ב S_n והקבוצה $A_{n+1}=\left\{\{x_i\}:\{x_i\}\in X, x_{n+1}=1\right\}$. ברור כי $S_1 \subset S_2 \subseteq \cdots$ שכן כך בנינו אותן. נגדיר $S=\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ ונראה כי $A=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \notin S$. נניח בשלילה כי $A\in S$, אזי בהכרח כי $A\in S_n$ לאיזשהו $n\in\mathbb{N}$, אבל $A=\{(1,1,\ldots)\}$, כלומר A הינה קבוצה בעלת איבר אחד ואילו ב S_n כל הקבוצות (פרט לריקה) הינן אינסופיות ולכן קיבלנו סתירה. מכאן ש S איננה סיגמא אלגברה.

3. הוכח כי אם (X,S,μ) הינו ממ"ח, $B\in S$, ונגדיר $\nu(A)=\mu(A\cap B)$ עבור $A\in S$ אזי ν הינה מידה.

פתרון: נבדוק את התכונות הנדרשות ממידה.

i. $\nu(\varnothing)=\mu(\varnothing\cap B)=\mu(\varnothing)=0$

ii. $\nu(A)=\mu(A\cap B)\geq 0$

iii. נניח כי $\{E_n\}$ סדרה של קבוצות זרות ב S, אזי

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu\left(B\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cap B)\right)$$

מכיוון ש E_n זרות נובע כי גם $B\cap E_n$ זרות ולכן, כיוון ש μ הינה מידה נקבל

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cap B)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n\cap B)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E_n)$$

4. נניח כי $\varepsilon\in(0,1)$ ו m היא מידת לבג. מצא קבוצה מדידה $E\subset[0,1]$ כך שהסגור של E הוא $[0,1]$ ו $m(E)=\varepsilon$.

פתרון: ניקח $E=[0,\varepsilon]\cup\{\mathbb{Q}\cap[0,1]\}$. ברור כי $Cl(E)=[0,1]$ ו E מדידה כאיחוד וחיתוך סופי של קבוצות מדידות. בנוסף, עפ"י תכונות המידה נקבל כי $m(E)\le m([0,\varepsilon])+m(\mathbb{Q}\cap[0,1])=\varepsilon+0$, ומכיוון ש $[0,\varepsilon]\subseteq E$ נובע כי $\varepsilon=m([0,\varepsilon])\le m(E)$. ולכן $m(E)=\varepsilon$ כנדרש.

5. אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מדידה לבג, הוכח כי קיימת פונקציה מדידה בורל g כך ש $g=f$ כב"מ.

הוכחה: על מנת להוכיח את הנ"ל אנו נשתמש במשפט הבא אותו נביא ללא הוכחה.

משפט: (Lusin) תהי f פונקציה מדידה המוגדרת על קבוצה E אשר מידתה סופית. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימת פונקציה רציפה g על $\mathbb{R}$ וקבוצה סגורה F אשר מוכלת ב E כך ש $f=g$ על F ו $m(E\setminus F)=\varepsilon$.

נוכיח קודם עבור f המוגדרת על הקטע $E=[-L,L]$, אשר לו מידה סופית. עפ"י משפט לוסין קיימת קבוצה קומפקטית F_n ב E כך שקיימת פונקציה רציפה g_n ו $f=g_n$ על F_n וכן $m(E/F_n)<\frac{1}{2^n}$. $m(E)=2L$, ונשים לב כי $\frac{1}{2L}m(\cdot)$ הינו מידת הסתברות על הקטע $[-L,L]$. עפ"י הנתון $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{M}m(|g_n-f|>\varepsilon)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^nM}<\infty$ לכל $\varepsilon>0$ ולכן עפ"י למת בורל קנטלי ניתן לראות כי $\lim_{n\to\infty}g_n(x)=f(x)$ כב"מ dm על הקטע E.

טענה: תהי $\{f_n\}$ סדרת פונקציות רציפות המתכנסות ל f, אזי f מדידה בורל.

הוכחה: נשים לב כי $\bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\left\{f_n\le\alpha+\frac{1}{r}\right\}=\{f\le\alpha\}$. מכיוון ש f_n רציפה לכל n, נובע כי $\left\{f_n\le\alpha+\frac{1}{r}\right\}$ סגורה ומכאן ש $\bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\left\{f_n\le\alpha+\frac{1}{r}\right\}=\{f\le\alpha\}$ מדידה בורל ולכן f מדידה בורל.

עפ"י הטענה לעיל נקבל כי $\lim_{n\to\infty}g_n(x)=g(x)$ הינה מדידה בורל וכבר ראינו כי $\lim_{n\to\infty}g_n(x)=f(x)$ בקטע E פרט אולי לקבוצה ב E עם מידת לבג 0.

עבור f המוגדרת על כל $\mathbb{R}$, נסתכל על סדרת הפונקציות $f_n=I_{[-n,n]}f$ אשר מתכנסת לכל x ל f. עפ"י מה שהראנו קודם נובע כי קיימת סדרה $\{g_n\}$ כך ש $g_nI_{[-n,n]}$ מדידה בורל ו $g_nI_{[-n,n]}=f_n$ כב"מ. נסתכל על הפונקציה $\lim_{n\to\infty}g_nI_{[-n,n]}(x)=g(x)$ הינה מדידה בורל כגבול של פונקציות מדידות בורל. כעת, נסמן ב A_n את הקבוצה $\left\{g_nI_{[-n,n]}\neq f_n\right\}$

ונשים לב כי $\{g(x)\neq f(x)\}\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ ולכן $m(\{g(x)\neq f(x)\})\leq m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)=0$

ומכאן קיבלנו את הדרוש.

6. נניח ו $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הינה פונקציה אינטגרבילית , $a\in\mathbb{R}$, ונגדיר $F(x)=\int_a^x f(y)dm(y)$

לכל $x\in[a,\infty)$. הוכח כי $F(x)$ הינה רציפה.

פתרון: נשים לב כי ניתן לרשום $F(x)=\int_{\mathbb{R}} f\cdot I_{[a,x]}dm$.

תהי $x_0\in[a,\infty)$, אזי ניקח סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[a,\infty)$ כך ש $x_n\to x_0$ ונוכיח כי $F(x_n)\to F(x_0)$ (כלומר נוכיח רציפות לפי היינה). נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n(x)=f\cdot I_{[a,x_n]}$. ברור כי $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)I_{[a,x_0]}$, פרט אולי לנקודה x_0 עצמה. כמו כן ברור כי $\left|f\cdot I_{[a,x_n]}\right|\leq|f|$ לכל x . מהנתון, f הינה אינטגרבילית ולכן $\int_{\mathbb{R}}|f|dm<\infty$.

עפ"י משפט ההתכנסות הנשלטת(עבור התכנסות כב"מ) נובע כי $\lim_{n\to\infty}F(x_n)=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_ndm=\int_{\mathbb{R}}f\cdot I_{[a,x_0]}dm=F(x_0)$, כלומר, $F(x)$ רציפה.

7. נניח כי μ ו ν הינן מידות חיוביות, סופיות ורגולריות חיצונית המוגדרות על סיגמא אלגברת בורל של הקטע $[0,1]$ כך ש $\int_{[0,1]}fd\nu=\int_{[0,1]}fd\mu$ עבור כל פונקציה רציפה f ממשית בקטע $[0,1]$. הוכח כי $\nu=\mu$.

פתרון: מכיוון ש אלגברת בורל נוצרת מכל הקבוצות הפתוחות ב $[0,1]$ מספיק להראות כי $\nu=\mu$ לכל קבוצה פתוחה בקטע $[0,1]$. יותר מזה, מספיק להראות כי הדבר נכון לכל קבוצה פתוחה מהצורה $[0,a)$ או $(b,1]$ או (a,b) כאשר $a,b\in[0,1]$.

נגדיר את סדרת הפונקציות הבאה: (כדאי לצייר)

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & \left[0,a-\frac{1}{n}\right) \\ n\left(a-\frac{1}{n}-x\right)+1 & \left[a-\frac{1}{n},a\right] \\ 0 & (a,1]\end{cases}$$

ניתן לראות כי $f_n(x)\leq1$ ולכן עפ"י משפט ההתכנסות החסומה נקבל כי $\lim_{n\to\infty}\int f_nd\mu=\lim_{n\to\infty}\int f_nd\nu=\int I_{[0,a)}d\mu=\int I_{[0,a)}d\nu=\mu([0,a))=\nu([0,a))$. באותו אופן נראה עבור שאר הקטעים הפתוחים. כעת, אם $U\subseteq[0,1]$ פתוחה כלשהי, אזי היא שווה לאיחוד זר של קטעים מהצורה שנאמרה לעיל, $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ ומסיגמא חיבוריות מקבלים $\mu(U)=\nu(U)$.

לסיום אם $B\subseteq[0,1]$ קבוצת בורל כלשהי, הרגולריות החיצונית נותנת $\mu(B)=\nu(B)$ וזהו.