אינפי 3

תרגול 10

תרגיל:

חשבו את האינטגרל:

$$\int_0^2 \int_0^z \int_0^y xyz\,dx\,dy\,dz$$

פתרון:

נחשב את האינטגרל לפי x, לפי y ולפי z. אם כן:

$$\int_0^2 \int_0^z \int_0^y xyz\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 \left(\int_0^z \left(\int_0^y xyz\,dx \right) dy \right) dz = \int_0^2 \left(\int_0^z \left(\frac{x^2yz}{2} \right)_{x=0}^{x=y} dy \right) dz =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^z \frac{y^3z}{2} dy \right) dz = \int_0^2 \left(\frac{y^4z}{8} \right)_{y=0}^{y=z} dz = \int_0^2 \frac{z^5}{8} dz = \left. \frac{z^6}{48} \right|_{z=0}^{z=2} = \frac{4}{3}$$

תרגיל:

חשבו את האינטגרל:

$$\iiint\limits_{G} (1-x)\,dxdydz$$

כאשר G היא הפירמידה שפיאותיה הם מישורי הצירים והמישור $3x+2y+z=6$.

__פתרון:__

נסתכל על z, למשל, כעל כלוא בין שתי פונקציות של x,y: $f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)$.

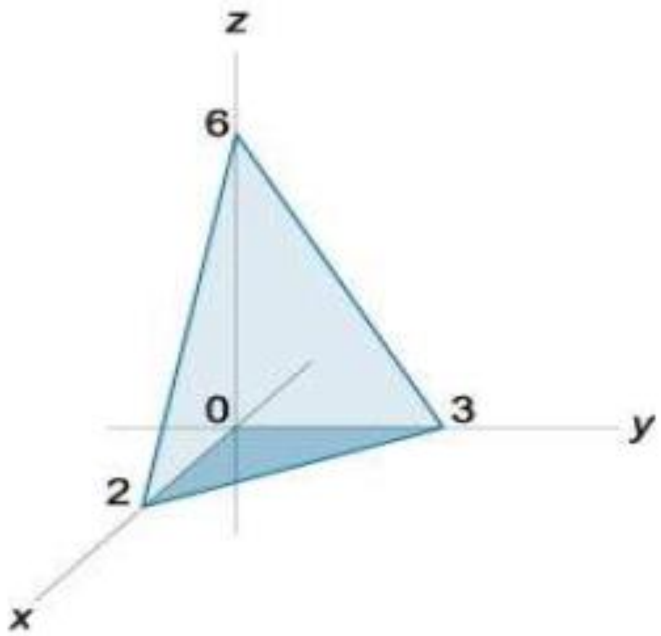
לאחר מכן, נסתכל על ההטלה של הגוף למישור xy, כלומר מהו התחום המתאים ל$-x,y$.

בתחום זה נסתכל על y, למשל, כעל כלוא בין שתי פונקציות של x: $y_1(x) \le y \le y_2(x)$.

לבסוף, נבין מהו התחום של x (כלוא בין שני מספרים).

התחום שלנו הוא:

התחום שלנו הוא:



נשים לב שנקודות החיתוך עם הצירים x, y, z הן:

$$(2, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 6)$$

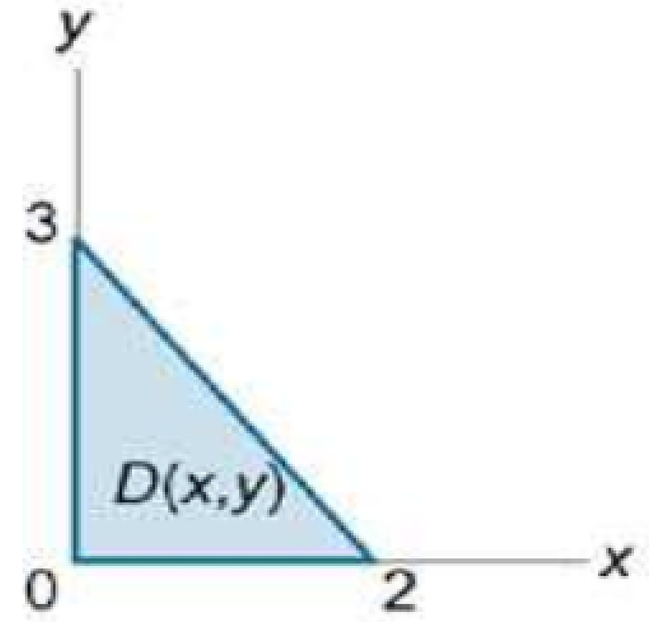
בהתאמה.

אם כן, z נמצא בין המישור למישור xy, שהוא המישור $z = 0$.

במקרה שלנו, המישור הוא: $z = 6 - 3x - 2y$, ולכן:

$$0 \leq z \leq 6 - 3x - 2y$$

כעת, ההטלה של הפירמידה על המישור xy תיתן לנו את התחום:



זהו המשולש שצלעותיו הן הישרים: $x=0, y=0$ והישר $y=3-\frac{3}{2}x$. לכן:

$$0 \leq y \leq 3-\frac{3}{2}x$$

ובסופו של דבר, $0 \le x \le 2$. לכן:

$$\iiint\limits_G (1-x)\,dxdydz = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{3-\frac{3}{2}x} \left(\int\limits_0^{6-2y-3x} (1-x)\,dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{3-\frac{3}{2}x} \left((1-x)\,z\right)_{z=0}^{z=6-2y-3x} dy \right) dx = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{3-\frac{3}{2}x} \left(6-3x-2y-6x+3x^2+2xy\right) dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(6y-9xy-y^2+3x^2y+xy^2\right)_{y=0}^{y=3-\frac{3}{2}x} dx = \int\limits_0^2 \left(9-18x+\frac{45}{4}x^2-\frac{9}{4}x^3\right) dx =$$

$$= \left(9x-\frac{18}{2}x^2+\frac{45}{12}x^3-\frac{9}{16}x^4\right)_{x=0}^{x=2} = 18-36+30-9=3$$

משפט- שטח באמצעות אינטגרל כפול:

יהי $D \subseteq \mathbb{R}^2$, נסמן את שטחו ב$-S$. אזי:

$$S = \iint\limits_D 1dxdy$$

בבית הספר חישבנו שטח הכלוא בין שתי פונקציות $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, כאשר $f \geq g$ בקטע $[a, b]$ בעזרת הנוסחה:

$$S = \int\limits_a^b \left(f\left(x\right) - g\left(x\right)\right)dx$$

כעת, ניתן לראות שזהו פשוט מקרה פרטי של המשפט שלנו, בו התחום נתון על ידי:

$$D = \{a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

ואז:

$$S = \iint\limits_D 1dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{f(x)} 1dy \right) dx = \int\limits_a^b (y)_{y=g(x)}^{y=f(x)} dx = \int\limits_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

באותו אופן, נפח באמצעות אינטגרל משולש:

יהי $G \subseteq \mathbb{R}^3$, נסמן את נפחו ב$-V$. אזי:

$$V = \iiint\limits_{G} 1 dx dy dz$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את נפח הפירמידה G שקודקודיה הם הנקודות:

$$O\left(0,0,0\right), A\left(1,0,0\right), B\left(0,2,0\right), C\left(0,0,3\right)$$

<u>פתרון</u>

מהמשפט,

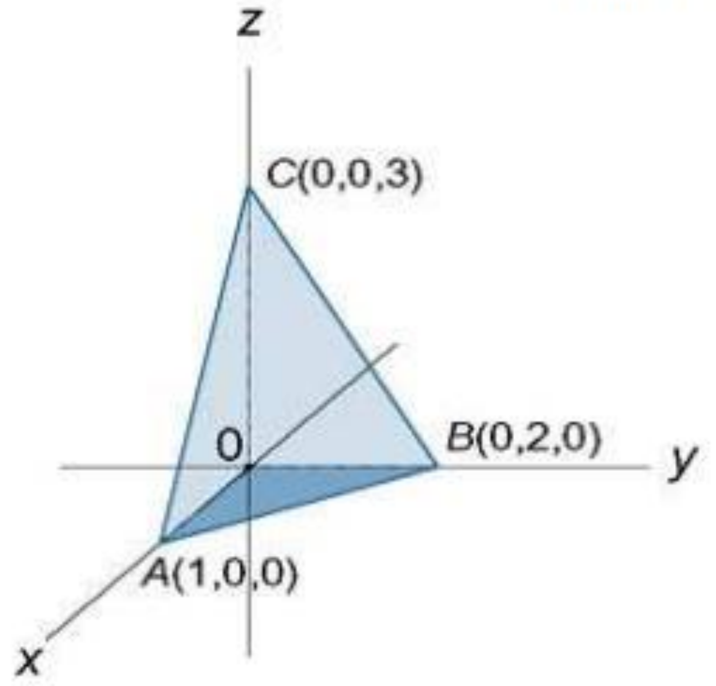
$$V=\iiint\limits_{G}1dxdydz$$

אם כן, המישור ABC הוא המישור $6x+3y+2z=6$ (היזכרו איך למצוא משוואת

מישור בעזרת 3 נקודות שעליו).

המישורים האחרים AOC, AOB, BOC הם מישורי הצירים.

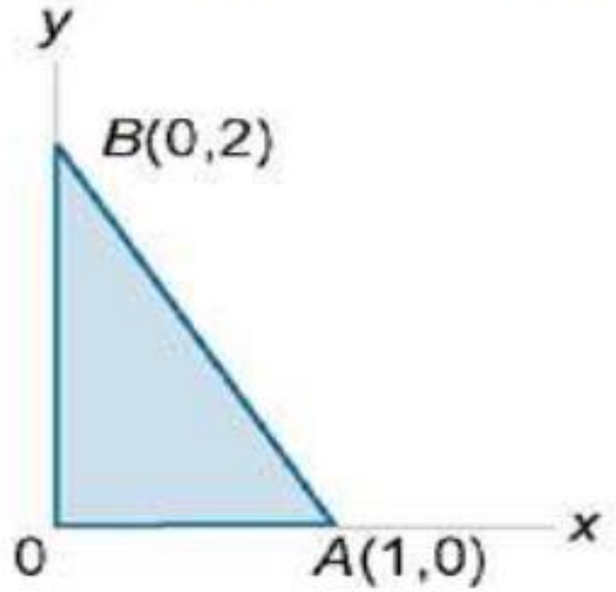
כלומר:



לפיכך, בתחום שלנו:

$$0 \leq z \leq \frac{6-3y-6x}{2} = 3 - 3x - \frac{3}{2}y$$

כעת, נטיל את הפירמידה על המישור xy ונקבל את התחום:



זהו התחום החסום על ידי הישרים $x=0, y=0, y=2-2x$. לכן:

$$0 \le y \le 2-2x$$

לבסוף, $0 \leq x \leq 1$. לכן:

$$V=\iiint\limits_G 1dxdydz=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{2-2x}\left(\int\limits_0^{3-3x-\frac{3}{2}y}1dz\right)dy\right)dx=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{2-2x}\left(3-3x-\frac{3}{2}y\right)dy\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(3y-3xy-\frac{3}{4}y^2\right)\Big|_{y=0}^{y=2-2x}dx=\int\limits_0^1\left(6-6x-6x+6x^2-\frac{3}{4}\left(4-8x+4x^2\right)\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1 3\left(1-2x+x^2\right)dx=3\cdot\left(x-x^2+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=1$$

כלומר, נפח הפירמידה הוא 1.

נסו לחשב את שטח הפירמידה בדרך ה"רגילה" - $V=\frac{Sh}{3}$.

החלפת משתנים באינטגרציה:

תהיינה $S \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ו-$g : S \to \mathbb{R}^n$ חח"ע וגזירה ברציפות על S כך ש-$|J_g(t)| \neq 0$ לכל $t \in S$.

אזי, לכל A קומפקטית בעלת נפח $A \subseteq g(S)$ ו-$f : A \to \mathbb{R}^n$ רציפה מתקיים:

$$\int\limits_A f(x)dx = \int\limits_{g^{-1}(A)} f(g(t))|J(t)|dt$$

החלפות משתנים נפוצות ושימושיות:

הקואורדינטות שהן ברירת המחדל שלנו הן הקואורדינטות הקרטזיות.

יש כמה החלפות משתנים חשובות ושימושיות שכדאי לזכור.

1. קואורדינטות קוטביות/פולריות:

החלפת המשתנים היא:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

כאשר: $(r,\theta) \in [0,\infty) \times [0,2\pi)$. האינטרוול של θ יכול להיות שונה.

בשביל להפוך קואורדינטות קוטביות לקרטזיות, נבצע:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & x > 0, y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & x = 0, y < 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

היעקוביאן שלנו במקרה הזה הוא:

$$\begin{vmatrix} (r\cos\theta)_r & (r\cos\theta)_\theta \\ (r\sin\theta)_r & (r\sin\theta)_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

2. קואורדינטות גליליות:

כדי להביע נקודה במרחב בעזרת גליל, אנו צריכים שלושה דברים; את הגובה, את הרדיוס של מעגל הבסיס ואת הזווית במעגל הבסיס (אזימוט).

שינוי המשתנים הוא:

$$y = r\sin\theta \qquad x = r\cos\theta$$

$$z = z$$

כאשר $(r,\theta,z)\in[0,\infty)\times[0,2\pi)\times\mathbb{R}$.

אם נרצה להפוך קואורדינטות גליליות לקואורדינטות קרטזיות, נהפוך את r,θ כמו בקואורדינטות קוטביות.

היעקוביאן במקרה זה הוא: $|J|=r$.

3. קואורדינטות כדוריות:

כדי להציג נקודה במרחב בעזרת כדור, אנו זקוקים לשלושה דברים; מרחקה מהראשית, הזווית שלה ביחס לאחד מהצירים (במקרה שלנו, z) ואת הזווית היחס למעגל הגדול במרכז הכדור (אזימוט).

שינוי המשתנים הוא:

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

כאשר: $(r,\theta,\phi) \in [0,\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi)$.

אם נרצה להביע קואורדינטות כדוריות בעזרת קואורדינטות קרטזיות, השינוי הוא:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

היעקוביאן במקרה זה הוא $|J| = r^2 \sin\theta$.