<u>תזכורת:</u>

סימון: את האיבר שנמצא בשורה ה־i ובעמודה ה־j של מטריצה A מסמנים: a_{ij} או $(A)_{ij}$ (ואפשר גם: A_{ij})

את קבוצת המטריצות עם m שורות ו־n עמודות עם איברים משדה $\mathbb{F}$ נסמן: $\mathbb{F}^{m\times n}$.

חיבור מטריצות: אפשר לחבר שתי מטריצות מאותו הגודל בדיוק בלבד. החיבור הוא "איבר־איבר", כלומר:

$$(A+B)_{ij}=(A)_{ij}+(B)_{ij}$$

למשל:

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 4 & 15 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 13 \\ 12 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

כפל בסקלר (גם "איבר־איבר"):

$$(\alpha A)_{ij}=\alpha\cdot(A)_{ij}$$

חלאס תזכורת. אנחנו רוצים להגדיר כפל בין מטריצות.

ראשית, אנחנו זקוקים לכמה סימונים. את השורה ה־i של מטריצה A נסמן: $R_i\left(A\right)$. את העמודה ה־j של מטריצה A נסמן: $C_j\left(A\right)$.

למשל:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 4 & 15 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_2\left(A\right)=\begin{pmatrix} -6 \\ 15 \end{pmatrix},\ R_1\left(A\right)=\begin{pmatrix} 1 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

סימון נוסף שאנו זקוקים לו הוא סימון הסכום באמצעות האות היוונית סיגמא: $\sum$. נתחיל מדוגמה:

$$1+2+3+\ldots+n$$

סימן הסיגמא מאפשר לנו לתאר את הסכום באופן הבא. נקרא לאיברים באיזשהו אינדקס (האותיות המועדפות הן i, j, k). אל הסכום שלנו אפשר להתייחס באופן הבא: אנחנו מחברים את i כאשר הוא שווה ל־1, את i כאשר הוא שווה ל־2 וכן הלאה. אפשר לסמן:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i$$

למטה מסמנים איפה אנחנו מתחילים, למעלה איפה מסיימים. שימו לב, שאפשר לבחור גם אותיות אחרות:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{k=1}^{n} k$$

דוגמאות נוספות:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} a_i$$

האינדקס "רץ" בסכום.

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{1m} = \sum_{j=1}^{m} a_{1j}$$

האינדקס הימני רץ, מ־1 ועד m. עוד דוגמאות:

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_7 = \sum_{k=0}^{3} x_{2k+1} = x_{2\cdot 0+1} + \ldots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

משוואה לינארית עם n נעלמים. דוגמה אחרונה:

$$a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij} = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}$$

<u>הערה:</u>

אם רוצים לתאר מכפלה שבה האינדקס רץ, נשתמש באות פאי Π, למשל:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$$

נחזור לעניין – אנחנו רוצים להגדיר כפל בין מטריצות. תזכורת אחת אחרונה – מכפלה סקלרית. כשמכפילים שני וקטורים מכפלה סקלרית, אנחנו מכפילים את האיבר הראשון של וקטור אחד באיבר הראשון של וקטור שני, ועוד האיבר השני של וקטור אחד כפול האיבר השני של וקטור שני, וכן הלאה. באופן דומה, נכפיל שורה בעמודה. למשל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1\cdot 2 + 5\cdot 2 + 0\cdot 1 + 3\cdot 2 = 18$$

כך נגדיר מכפלה של מטריצות, באמצעות כפל שורה בעמודה. קודם כל, מתי מוגדרת המכפלה? המכפלה AB מוגדרת כאשר מספר העמודות של A שווה למספר השורות של B, כלומר: $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times k}$. התוצאה היא מטריצה: $AB \in \mathbb{F}^{m\times k}$. איך מבצעים את המכפלה? האיבר $(AB)_{ij}$ הוא המכפלה של השורה ה־i של A בעמודה ה־j של B (שורה משמאל כפול עמודה מימין). כלומר:

$$(AB)_{ij} = R_i(A)\cdot C_j(B) = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} =$$

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}(B)_{kj}$$

<u>דוגמאות:</u>

.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

ראשית, נאמר לעצמנו מה הגודל של AB. $A, B \in \mathbb{F}^{2\times 2}$, ולכן: $AB \in \mathbb{F}^{2\times 2}$. נחשב כל איבר בנפרד:

$$(AB)_{11} = R_1(A)\cdot C_1(B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 1\cdot 5 + 2\cdot 7 = 19$$

$$(AB)_{12} = R_1(A) \cdot C_2(B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 22$$

$$(AB)_{21} = R_2(A) \cdot C_1(B) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 43$$

$$(AB)_{22} = R_2(A) \cdot C_2(B) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 = 50$$

סה"כ:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ראשית, נאמר לעצמנו מה הגודל של AB. $A \in \mathbb{F}^{2\times 3}$, $B \in \mathbb{F}^{3\times 2}$. לכן: $AB \in \mathbb{F}^{2\times 2}$. ובכך:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} 1 \cdot (-7) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ -1 \cdot (-7) + 5 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 & -1 \cdot 4 + 5 \cdot 0 + (-4) \end{matrix} \right.$$

כאן, גם המכפלה BA מוגדרת; זו מטריצה 3×3. נחשב אותה:

$$BA = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -37 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A מגודל 3×3, B מגודל 3×1 ולכן AB מגודל 3×1. נכפיל:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ 4x+5y+6z \\ 7x+8y+9z \end{pmatrix}$$

כאן, המכפלה BA לא מוגדרת (מספר העמודות של B שונה ממספר השורות של A).

<u>הערות:</u>

א. נשים לב שכפל מטריצות אינו חילופי. לא רק כשמכפלה מצד אחד לא מוגדרת (כמו בדוגמה 3) ולא רק כשהמכפלות הן מגדלים שונים (כמו בדוגמה 2), גם אם AB, BA מאותו גודל, הן לא בהכרח שוות. למשל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

אם כן מתקיים: $AB = BA$, אנחנו אומרים שהמטריצות A, B מתחלפות.

ב. בהמשך לדוגמה 3, נשים לב שאפשר לתאר מערכת של משוואות ליניאריות באמצעות כפל מטריצות. למשל:

$$\begin{cases} x+2y+3z = 4 \\ 4x+5y+6z = -1 \\ 7x+8y+9z = 10 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

באופן כללי:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots + \vdots + \vdots = \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

מטריצת המקדמים כפול וקטור המשתנים שווה לוקטור המקדמים החופשיים.

$m \times n, n \times 1 \Longrightarrow m \times 1$.

אם נסמן את מטריצת המקדמים ב־A, את וקטור המשתנים ב־x (אפשר: $\overline{x}$) ואת וקטור המקדמים החופשיים ב־b, נקבל:

$$Ax = b$$

אנחנו מכפילים שורות בעמודות, ומטריצות בעמודות; כדי לעשות זאת באופן יעיל (שיעזור לנו להוכיח משפטים) נשתמש בכפל "עמודה־עמודה" וכפל "שורה־שורה".
אם אנחנו רוצים לדבר על שורות ועמודות, אנחנו צריכים דרך לסמן אותן.
את קבוצת הוקטורים עם n רכיבים משדה $\mathbb{F}$ נסמן $\mathbb{F}^n$. למשל, בבית הספר ראינו את $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

באופן כללי:

$$\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}\}$$

איך נתאר מטריצה שעמודותיה/שורותיה הן וקטורים נתונים? למשל, נתונים לנו הוקטורים: $(1,0,1), (-2,3,4)$. איך נסמן מטריצה שעמודותיה הן הוקטורים האלה? איך נסמן מטריצה ששורותיה הן הוקטורים האלה?
אם אנחנו רוצים מטריצה שעמודותיה הן הוקטורים, נסמן מעל ומתחת לוקטורים קו אנכי. אם אנחנו רוצים מטרציה ששורותיה הן הוקטורים, נסמן קווים בצדי הוקטור.

<u>כפל עמודה־עמודה:</u>

אם: $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ ואנחנו רוצים לכפול את המטריצה A בוקטור: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, למשל: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ בוקטור: $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. מתקיים:

$$Ax = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$$

כלומר, האיבר הראשון בוקטור כפול העמודה הראשונה במטריצה, ועוד האיבר השני בוקטור כפול העמודה השניה במטריצה, וכן הלאה. למשל, בדוגמה שלנו:

$$Ax=\begin{pmatrix}1&4\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$$

ולפי מה שהצגנו עכשיו:

$$\begin{pmatrix}1&4\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$$

יתר על כן, נוכל להכפיל כך שתי מטריצות זו בזו, באופן הבא: $B=\begin{pmatrix}|&&|\\v_1&\dots&v_n\\|&&|\end{pmatrix}$,A, את המכפלה AB אפשר לחשב כך:

$$AB=\begin{pmatrix}|&&|\\Av_1&\dots&Av_n\\|&&|\end{pmatrix}$$

כלומר, העמודה הראשונה של AB זו A כפול העמודה הראשונה של B, העמודה השניה של AB זו A כפול העמודה השניה של B וכן הלאה. אפשר לסמן:

$$C_j\left(AB\right)=A\cdot C_j\left(B\right)$$

באופן דומה, כפל שורה־שורה:

$$R_i\left(AB\right)=R_i\left(A\right)\cdot B$$

האם יש איבר נייטרלי לכפל מטריצות?

השאלה היא מעט אינטואיטיבית, אנחנו מחפשים B כך ש: $AB=BA=A$ לכל A; בפועל, לא תמיד שתי המכפלות מוגדרות, ולכן נסתפק בשתי מטריצות B,C שתקיימנה: $AB=A, CA=A$. אם המטריצה A ריבועית (מספר השורות שווה למספר העמודות), אז קיימת B כך ש: $AB=BA=A$. המטריצה הזו נקראת מטריצת היחידה, ומסומנת I_n – זו מטריצה ריבועית

עם n שורות ו־n עמודות. איך מטריצת היחידה מוגדרת? האיברים באלכסון שווים ל־1 ($\left(I_n\right)_{ii}=1$) ושאר האיברים שווים ל־0. למשל:

$$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

אפשר לסמן:

$$\left(I_n\right)_{ij}=\begin{cases}1&i=j\\0&i\neq j\end{cases}$$

דרך סימון בסיסית ונפוצה – מימין התנאי, משמאל מה קורה כשהתנאי מתקיים. דוגמה נוספת:

$$|x|=\begin{cases}x&x\geq 0\\-x&x<0\end{cases}$$

אם ברור מההקשר מהו n, לא צריך אותו ואפשר לסמן פשוט: I.

<u>משפט:</u>

תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה. מתקיים:

$$I_mA=AI_n=A$$

למשל:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&3&5\end{pmatrix}$$

בפרט, אם A ריבועית, אז I מאותו גודל מקיימת: $AI=IA=A$.

נסמן: $C_i\left(I\right)=e_i$ (ואפשר לסמן כך גם את השורה); e_i הוא וקטור שבמקום ה־i יש 1, והשאר אפסים. לפי כפל עמודה־עמודה, נקבל:

$$C_i\left(A\right)=C_i\left(AI\right)=A\cdot C_i\left(I\right)=Ae_i$$

אפשר להוכיח את המשפט באמצעות כפל של שורה בעמודה – להוכיח שלכל i,j מתקיים: $\left(AI_n\right)_{ij}=\left(A\right)_{ij}$. אם כן:

$$\left(AI_n\right)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\left(A\right)_{ik}\left(I_n\right)_{kj}=$$

כעת, למה שווה האיבר $(I_n)_{kj}$? אם $j \neq k$, הוא שווה ל־0, והוא לא תורם שום דבר לסכום. האיבר היחיד שלא מתאפס מתקבל כאשר $j = k$, ואז $(I_n)_{kj} = 1$. נקבל בסכום:

$$(AI_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} (I_n)_{kj} = (A)_{ij} \cdot 1 = (A)_{ij}$$

כנדרש.

<u>שחלוף: $Transpose$</u>

תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. המטריצה המשוחלפת A^t (אפשר גם A^T) היא מטריצה $A^t =\in \mathbb{F}^{n \times m}$ המוגדרת כך:

$$\left(A^t\right)_{ij} = (A)_{ji}$$

כלומר, שורות הופכות לעמודות ולהיפך. למשל:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

דוגמה נוספת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

כאשר $A = A^t$, A נקראת סימטרית. גם I היא סימטרית. במטריצה סימטרית, מתקיים: $(A)_{ij} = (A)_{ji}$.

כאשר $A = -A^t$, A נקראת אנטי־סימטרית. למשל:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

נשים לב שאנטי־סימטרית זה לא "ההיפך" מסימטרית, יש הרבה מטריצות שהן לא זה ולא זה, למשל $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. כמו כן, נשים לב שמטריצה סימטרית/אנטי־סימטרית חייבת להיות ריבועית.

<u>תכונות:</u>

1. במטריצה אנטי־סימטרית, כל איברי האלכסון הם אפסים. למה? במטריצה אנטי־סימטרית, $(A)_{ji} = (A^t)_{ij} = -(A)_{ij}$. על האלכסון, $i = j$ ואז: $(A)_{ii} = -(A)_{ii}$ ולכן: $(A)_{ii} = 0$ (בהנחה שהשדה אינו $\mathbb{Z}_2$...אנחנו לא צריכים להיכנס לבור הזה).
2. אם A גם סימטרית וגם אנטי־סימטרית, אז $A = 0$.