פתרון מבחן לדוגמה אינפי 2 תשע"ט

11 ביוני 2019

חלק א'

1. נכון. התכנסות בהחלט גוררת התכנסות.
2. לא נכון. למשל, $f_n(x)=\frac{\sin\left(n^{10}x\right)}{n^5}$. הסדרה מתכנסת במ"ש לפונקציה $f(x)=0$ בקטע $[0,1]$ אבל סדרת הנגזרות $f_n'(x)=n^5\cos\left(n^{10}x\right)$ לא מתכנסת באף נקודה בקטע.
3. לא נכון. הפונקציה אי־זוגית, הקטע סימטרי, האינטגרל מתאפס.
4. לא נכון. נתבונן בפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0\leq x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$ בקטע $[0,1]$. הפונקציה אי־שלילית, אינטגרבילית, קיימת נקודה בה x_0 בה $f(x_0)>0$ ($x_0=1$) אבל האינטגרל מתאפס.
5. נכון. בקטע שלנו, $\frac{1}{n^2+n}\leq\frac{1}{n^2}$, $x^2<1,\ 0\leq\arctan(nx)\leq\frac{\pi}{2}$ ולכן: $\left|\frac{x^2\arctan(nx)}{n^2+n}\right|\leq\frac{1}{n^2}$ לכל x בקטע ולכל n. לפי מבחן ויירשטראס, הטור מתכנס במ"ש בקטע.
6. נכון. במסלולים מהצורה $y=ax^2$ נקבל גבולות שונים.
7. לא נכון. הנגזרת לא בהכרח קיימת. אפשר להשתמש בדוגמאות דומות למה שראינו עוד באינפי 1, למשל $f(x,y)=|x|+|y|$.
8. לא נכון. למשל: $\sum x^n,\sum -x^n$; רדיוסי ההתכנסות הם $R_1=R_2=1$, אבל טור הסכום הוא: $\sum(x^n-x^n)=\sum 0=0$, עם רדיוס התכנסות $R=\infty$.
9. נכון. זהו טור מקלורן של $\sin x$, ראינו בהרצאה שהוא מתכנס בכל $\mathbb{R}$. אפשר גם לחשב את R לפי הנוסחה.
10. לא נכון. אם נתבונן למשל בפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[0,1]$, בכל חלוקה $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$, בכל קטע $[x_{i-1},x_i]$ בחלוקה הערך המקסימלי של f הוא x_i והמינימלי הוא x_{i-1}, $x_{i-1}<x_i$ ולכן סכום דרבו העליון $\overline{S}(f,P)$ גדול ממש מסכום דרבו התחתון $\underline{S}(f,P)$.

חלק ב'

1. נחשב את האינטגרלים.

(א) נציב $t=x^2$; $dt=2xdx$ ונקבל:

$$\int x^3\cos\left(x^2\right)dx=\frac{1}{2}\int x^2\cdot\cos\left(x^2\right)\cdot 2xdx=\frac{1}{2}\int t\cos tdt=$$

בחלקים – $u=t,v'=\cos t$ ולכן: $u'=1,v=\sin t$. נקבל:

$$\frac{1}{2}\left(t\sin t-\int 1\cdot\sin tdt\right)=\frac{1}{2}\left(t\sin t+\cos t\right)+C$$

נחזור למשתנה המקורי:

$$=\frac{1}{2}\left(x^2\sin x^2+\cos x^2\right)+C$$

(ב) נציב $t=\sqrt{e^x-1}$; $dt=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx$. נשים לב ש: $t^2=e^x-1$ ולכן $e^x=t^2+1$, כלומר: $dx=\frac{2\sqrt{e^x-1}}{e^x}dt=\frac{2t}{t^2+1}dt$, ונקבל:

$$\int\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}dx=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt=2\int\frac{1}{t^2+1}dt=2\arctan\left(t\right)+C=2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)+C$$

2. נבדוק התכנסות.

(א) $\int_0^1\frac{\ln x}{x-1}dx$ – מה הבעיות באינטגרל? יש שתי נקודות "חשודות", $x=0,1$. בנקודה $x=1$, גם המכנה וגם המונה שואפים ל־0 ואפשר להשתמש בלופיטל:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1$$

הגבול סופי והנקודה לא בעייתית. בנקודה $x=0$ הגבול אינסופי.
לפי לופיטל, $\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\longrightarrow 0$ כאשר $x\longrightarrow 0$, ולכן $|\ln x|\leq\frac{1}{\sqrt{x}}$ בתחום שלנו, כלומר: $\int_0^1\frac{\ln x}{x-1}dx\leq\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}dx$ (שימו לב לסימנים, ששומרים על הפונקציות חיוביות).
את האינטגרל הימני אפשר להשוות גבולית עם $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ שמתכנס, ולכן לפי מבחן ההשוואה גם האינטגרל שלנו מתכנס (אפשר להשוות גבולית עם $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ישירות).

(ב) $\int_0^1\frac{1}{e^x\ln x}dx$ – נשווה גבולית עם $\frac{1}{(1-x)}$ בנקודה $x=1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{\frac{1}{(1-x)}}{\frac{1}{e^x\ln x}}=\lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{e^x\ln x}{1-x}=e$$

עם לופיטל (כמו בסעיף הקודם), ולכן האינטגרלים מתכנסים/מתבדרים יחדיו. האינטגרל של $\frac{1}{x-1}$ מתבדר ולכן גם האינטגרל שלנו מתבדר.

3. (א) ראשית, $f_n(x_0) \longrightarrow 0$ לכל x_0 בקטע, ולכן הפונקציה הגבולית היא $f(x) = 0$.
בשביל התכנסות במ"ש, נבדוק האם:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

נחשב את הסופרמום. מתקיים: $|f_n(x) - f(x)| = |x^n(1-x^n) - 0| = x^n(1-x^n)$ בקטע שלנו. הקטע סגור והפונקציה רציפה, ולכן הסופרמום הוא מקסימום.
כדי למצוא מקסימום לפונקציה $|f_n(x) - f(x)| = x^n - x^{2n}$, נגזור ונשווה ל־0:

$$0 = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = nx^{n-1}(1-2x^n)$$

נקבל שני פתרונות – $x = 0$ (נותן את נקודת המינימום), $1 - 2x^n = 0$ כלומר: $x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$. נציב בפונקציה ונקבל: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, וזהו המקסימום. כלומר:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \neq 0$$

ולכן ההתכנסות אינה במ"ש.

(ב) אפשר לרשום:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n$$

אנו מכירים את הטור ההנדסי:

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2+x}$$

נשים לב שזה אפשרי בתחום $|x| < 2$.

4. ראשית, נמצא נקודות חשודות בתוך התחום – נגזור ונשווה ל־0:

$$\begin{cases} 0 = f_x = 2xy \\ 0 = f_y = x^2 + 1 \end{cases}$$

למשוואה השנייה אין פתרון, לכן אין נקודות חשודות בתוך התחום.
שנית, נמצא נקודות חשודות על שפת התחום, שנסמן: $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$.
משוואות לגראנז' הן:

$$\begin{cases} 2xy = 2\lambda x \\ x^2 + 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

אם נסדר את המשוואה הראשונה: $x(y-\lambda)=0$, נקבל שני מקרים.
אם $x=0$, מהמשוואה השלישית $y^2-2=0$ ונקבל שתי נקודות חשודות: $\left(0,\pm\sqrt{2}\right)$.
אם $y=\lambda$, נציב במשוואה השנייה: $x^2+1=2y^2$, כלומר $x^2=2y^2-1$; נציב זאת במשוואה השלישית ונקבל: $2y^2-1+y^2-2=0$, כלומר $y=\pm1$.
אם נציב זאת חזרה בשוויון $x^2=2y^2-1$, נקבל שגם: $x=\pm1$, ובסה"כ יש עוד 4 נקודות חשודות: $(\pm1,\pm1)$.
כדי למצוא את הקיצון, נציב את כל הנקודות בפונקציה:

$$f\left(0,\sqrt{2}\right)=(0^2+1)\sqrt{2}=\sqrt{2},\ f\left(0,-\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}$$

$$f(\pm1,1)=2,\ f(\pm1,-1)=-2$$

לכן, הנקודות $(\pm1,1)$ הן נקודות מקסימום, הנקודות $(\pm1,-1)$ הן נקודות מינימום.

5. משוואת הקו הישר המחבר את הנקודות $(1,1)\,,(0,0)$ היא $y=x$, ולכן אפשר להציג את המשולש כך: $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le y\le x,\ 0\le x\le 1\right\}$. לכן:

$$\iint\limits_D e^x dxdy=\int\limits_0^1\int\limits_0^x e^x dydx=\int\limits_0^1 e^x\int\limits_0^x dydx=\int\limits_0^1 xe^x dx$$

בחלקים: $u=x,\ v'=e^x$ לכן: $u'=1,\ v=e^x$ ונקבל:

$$=\ xe^x|_0^1-\int\limits_0^1 e^x dx=e^1-\left(e^1-e^0\right)=1$$