

תרגילים לדוגמא - מבחן סטטיסטיקה והסתברות

- תרגילי בגרות, שאלה 3 במבחני 35581 (806) 5 יח"ל, 5 שנים אחרונות ותרגילים שראינו בהרצאות. דגש על הסתברות מותנית ובינומי ברמה סבירה.
- תרגילים בנוסחת ההסתברות השלמה – בסגנון השאלות מהמבחנים לדוגמא.
- תרגילים ברווח סמך – בסגנון השאלות מההרצאה האחרונה.

1. פונקציית הסתברות - מתוך גול

חברה לניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט א' יצליח הינו 0.7, הסיכוי שפרויקט ב' יצליח הינו 0.8, והסיכוי שפרויקט ג' יצליח הינו 0.9. נתון שהצלחת כל פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגדיר את X להיות מספר הפרויקטים שיצליחו. בנו את פונקציית ההסתברות של X .

פתרון:

ראו טבלה:

3	2	1	0	X
0.504	0.398	0.092	0.006	$P(X)$

2. התפלגות בינומית (מ"מ בדיד) – מתוך גול

בבית הימורים יש שורה של 6 מכונות מזל מאותו סוג. משחק במכונת מזל כזו עולה ₪5. ההסתברות לזכות ב-₪20 בכל אחת מהמכונות היא 0.1 וההסתברות להפסיד את ההשקעה היא 0.9 בכל מכונה. מהמר נכנס לבית הימורים ומכניס ₪5 לכל אחת מ-6 המכונות.

- מה ההסתברות שיפסיד בכל המכונות?
- מה ההסתברות שיזכה בדיוק בשתי מכונות?
- מה ההסתברות שיזכה ביותר כסף מה-₪30 שהשקיע?
- מהן התוחלת וסטיית התקן של הרווח נטו של המהמר (הזכיות בניכוי ההשקעה)?

א. 0.5314 ב. 0.0984 ג. 0.1143

ד. תוחלת: -18, סטיית תקן: 14.697

3. התפלגות גיאומטרית (מ"מ בדיד) – מתוך גול

מטילים מטבע עד אשר מתקבלת התוצאה "עץ".

א. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 10 פעמים?

ב. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 5 פעמים,

אם ידוע שהמטבע הוטל לפחות 3 פעמים?

ג. אם ידוע שבשתי ההטלות הראשונות התקבלה התוצאה "פלי",

מה ההסתברות שהאדם הטיל את המטבע 7 פעמים?

ד. מה תוחלת מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה "פלי"?

א. 0.999 ב. 0.875 ג. 0.03125 ד. 1

4. התפלגות אחידה (בדידה) – מתוך גול

בכד 10 כדורים שרק אחד בצבע אדום. כדורים הוצאו ללא החזרה עד שהתקבל

הכדור האדום. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הכדורים שהוצאו?

תוחלת: 5.5, שונות: 8.25

5. התפלגות פואסון (בדידה) – מתוך גול

במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה.

מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.

א. מה ההסתברות שבדקה תתקבל פניה 1?

ב. מה ההסתברות שבדקה תתקבל לפחות פניה 1?

ג. מה ההסתברות שבדקה יתקבלו לכל היותר 2 פניות?

ד. מה שונות מספר הפניות בדקה?

א. 0.0337 ב. 0.9933 ג. 0.1246 ד. 5

6. התפלגות פואסון (בדידה) – מתוך גול

לחנות AM:PM השכונתית מספר הלקוחות שנכנסים מתפלג פואסונית עם

ממוצע של 2 לקוחות לדקה.

א. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו בדיוק 3 לקוחות?

ב. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יגיח לפחות לקוח אחד?

ג. מה ההסתברות שבדקה כלשהי יהיו לכל היותר שני לקוחות?

ד. מהי התוחלת ומה סטיית התקן של מספר הלקוחות שנכנסים לחנות בדקה?

7. התפלגות רציפה – מתוך גול

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & 1 \leq x \leq 2 \\ kx & 2 < x \leq 3 \end{cases} \quad \text{נתונה פונקציית הצפיפות הבאה:}$$

א. מצאו את ערכו של k .

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו $P(x > 2.5)$.

א. $\frac{1}{6}$ ג. 0.229

8. התפלגות מעריכית (רציפה) – מתוך גול

משך הזמן X (בדקות) שסטודנטים עובדים רצוף על מחשב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 דקות.

- א. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך פחות מרבע שעה?
- ב. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך בין רבע שעה לחצי שעה?
- ג. אם סטודנט עובד על המחשב כבר יותר מ-10 דקות, מה ההסתברות שמשך כל עבודתו יעלה על 30 דקות?
- ד. מהו הזמן שבסיכוי של 90% הסטודנט יעבוד פחות ממנו?

א. 0.393 ב. 0.239 ג. 0.513 ד. 69.08

9. התפלגות נורמלית (רציפה) – מתוך גול

הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.

- א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-182.4 ס"מ?
- ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
- ג. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
- ד. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-170 ס"מ?
- ה. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?

א. 89.25% ב. 2.28% ג. 0 ד. 50%

10. התפלגות נורמלית (רציפה)

בכיתה מסויימת ממוצע הקפיצה לגובה הוא $\bar{X} = 95$ (ס"מ) עם סטיית תקן $S_x = 5$ (ס"מ). ממוצע הזמן של ריצת 60 מטר הוא $\bar{Y} = 10.5$ (שניות) עם סטיית תקן $S_y = 0.3$ (שניות). האם תלמיד הקופץ 100 ס"מ לגובה ורוץ 60 מטר ב-10.8 שניות, מצטיין בשני ענפי הספורט באותה מידה?
פתרון:

כדי להשוות את הצטיינות היחסית של התלמיד נתקן את הישגיו.

$$Z_x = \frac{x - \bar{X}}{S_x} = \frac{100 - 95}{5} = 1 \quad \text{קפיצה לרוחק:}$$

$$Z_y = \frac{y - \bar{Y}}{S_y} = \frac{10.8 - 10.5}{0.3} = 1 \quad \text{ריצה:}$$

קיבלנו שבשני המקרים התלמיד נמצא יחידת תקן אחת (סטיית תקן) מעל לממוצע. אבל בריצה המטרה לרוץ כמה שפחות זמן בניגוד לקפיצה שהמטרה לקפוץ כמה שיותר גבוה. לכן התלמיד טוב יותר בקפיצה לגובה. הערה: אילו היינו מקבלים שבריצה סטיית התקן שלו היא -1, אזי ניתן היה לומר שהוא מצטיין אותה מידה בשני ענפי הספורט.

11. התפלגות נורמלית (רציפה)

המכירות של שפופרות משחת שיניים מסויימת מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10,000 וסטיית תקן של 1,500 יחידות בשבוע.

א. מהי ההסתברות שיותר מ-12,000 שפופרות תמכרנה בשבוע?

פתרון:

(א). נסמן ב- X את מספר השפופרות המיוצר בשבוע, אזי $X \sim N(10,000; 1500^2)$.

אנו נדרשים לחשב את ההסתברות שתמכרנה יותר מ-12000 שפופרות, דהיינו $P(X > 12,000)$.

כדי להשתמש בטבלה נתקן לנורמלית סטנדרטית $Z \sim N(0,1)$, מקבלים

$$P(X > 12,000) = P\left(\frac{Z > \frac{12,000 - 10,000}{1,500}}{\frac{10,000}{1,500}}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{4}{3}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{4}{3}\right) = 0.091$$

תרגילים על רווח סמך פתרנו בשיעור האחרון.