3 קומבינטוריקה

3.1 בעיות מניה בסיסיות

שאלה 3.1. בכמה דרכים אפשר לסדר n אנשים בתור?

פתרון. עבור בחירת הראשון בתור יש n אפשרויות. כעת לבחירת השני בתור נותרו $n-1$ אפשריות. נניח באינדוקציה כי מספר האפשרויות לסדר $n-1$ אנשים בתור הוא $(n-1)!$, ונקבל כי מספר הדרכים לסדר n אנשים בתור הוא $n\cdot(n-1)!=n!$. שימו לב שמגדירים כי $0!=1$. נאמר כי מספר התמורות של איברי הקבוצה $\{1,\ldots,n\}$ הוא n עצרת. זהו גם מספר הפונקציות החח"ע מהקבוצה $\{1,\ldots,n\}$ אל עצמה.

נסכם בטבלה את מספר האפשרויות לבחור k עצמים מתוך n עצמים (מניחים בדר"כ $k \leq n$):

	עם חזרה	ללא חזרה
עם חשיבות לסדר	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ללא חשיבות לסדר	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

שאלה 3.2. כמה מחרוזות בינאריות יש עם שלוש ספרות?

פתרון. זו בחירה עם חשיבות לסדר ועם חזרה. סה"כ יש $2^3=8$ אפשרויות:

$$000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$$

שאלה 3.3. כמה "מילים" בנות ארבע אותיות ניתן לבנות מהאלפבית האנגלי, כאשר אסור שבמילה תופיע אותה אות יותר מפעם אחת?

פתרון. מספר המילים החוקיות הוא בחירה עם חשיבות לסדר ללא חזרה של 4 איברים מתוך הקבוצה $\{a, b, \ldots, z\}$. כלומר $\frac{26!}{22!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358{,}800$ אפשרויות.

הגדרה 3.4. יהיו $0 \leq k \leq n$ מספרים שלמים. המספר $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ נקרא המקדם הבינומי. (בתרגיל הבית אתם תוכיחו בדרך אלגברית כי זה אכן מספר שלם.)

תרגיל 3.5. הוכיחו כי $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

פתרון. בדרך אלגברית קל מאוד לראות זאת לפי ההגדרה. בדרך קומבינטורית נשים לב כי הבעיה של בחירת k עצמים מתוך n עצמים שקולה לבחירת $n-k$ עצמים מתוך n עצמים. מוכיחים זאת לפי פונקציה חח"ע ועל בין תת־הקבוצות בנות k איברים לבין תת־הקבוצות בנות $n-k$ איברים. כל תת־קבוצה נשלחת אל המשלימה שלה.

תרגיל 3.6. בכיתה יש 15 מהנדסי מחשב ו-9 מהנדסי חשמל. בכמה דרכים ניתן לבחור ועד לכיתה שיכלול 3 מהנדסי מחשב ו-2 מהנדסי חשמל?

פתרון. נבצע שתי בחירות לא תלויות של k אנשים מתוך קבוצה של n אנשים ללא חשיבות לסדר וללא חזרה. כלומר יש $\binom{15}{3}\binom{9}{2} = 16{,}380$ אפשרויות לבחירת חברי הועד.

תרגיל 3.7. בכמה דרכים ניתן לסדר k אנשים מתוך קבוצה של n אנשים במעגל? (שני סידורים נחשבים זהים אם ניתן להגיע מהאחד אל השני על ידי סיבוב.)

פתרון. תחילה נשים לב כי מספר הדרכים לסידור האנשים בתור הוא $\frac{n!}{(n-k)!}$. לאחר "שסוגרים" את התור למעגל, כל סידור כזה מתאים ל-k סידורים. כלומר בסך הכל יש $\frac{n!}{(n-k)!k}$ אפשרויות.

תרגיל 3.8. כמה פתרונות שלמים אי־שליליים יש למשוואה $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$?

פתרון. בשיטת "כוכבים ומחיצות" מראים שזה שקול לבחירת k עצמים מתוך n עצמים ללא חשיבות לסדר ועם חזרה. כלומר יש $\binom{n+k-1}{k}$ אפשרויות.

ביתר פירוט: מציגים את $k = 1 + \cdots + 1$ כסכום של אחדות ("כוכבים"), ומחלקים אותם בעזרת $n-1$ מחיצות ל-n גושים (אולי ריקים). מספר האפשרויות לסדרות שבנויות מ-s כוכבים ו-t מחיצות הוא $\binom{s+t}{s}$, ואצלנו יש $n+k-1$ מקומות שצריך למלא עם k כוכבים ו-$(n-1)$ מחיצות, ולכן יש $\binom{n+k-1}{k}$ אפשרויות. התאמה חח"ע ועל בין הפתרונות למשוואה לבין בחירה ללא חשיבות לסדר ועם חזרה מתוך $\{1, \ldots, n\}$ היא שבהנתן פתרון $(x_1, \ldots, x_n)$ הוא יעבור לבחירה שבה $1 \leq i \leq n$ נבחר x_i פעמים.

תרגיל 3.9. יהיו n כדורים שקופים זהים, ו-n כדורים צבעוניים בצבעים שונים (לא שקופים). בכמה דרכים ניתן לחלק את הכדורים ל-$2n$ תאים מובחנים כך שבכל תא מתקיים (אחד מהסעיפים הבאים):

1. לכל היותר כדור אחד.
2. לכל היותר כדור שקוף אחד.
3. לכל היותר כדור צבעוני אחד.
4. מספר שווה של כדורים שקופים וצבעוניים

פתרון. נחשב

1. לאחר שבוחרים לאן הולכים הכדורים הצבעוניים, המיקום של הכדורים השקופים נקבע לחלוטין לתאים הריקים. נותרו עם בחירה של n תאים מתוך $2n$ תאים עם חשיבות לסדר וללא חזרה עבור הכדורים הצבעוניים, כלומר $\frac{(2n)!}{n!}$ אפשרויות.
2. אין מגבלה על מספר הכדורים הצבעוניים בכל תא, ולכן זו בחירה של n תאים מתוך $2n$ תאים עם חשיבות לסדר ועם חזרות, כלומר $(2n)^n$ אפשרויות. מספר האפשרויות לכדורים השקופים הוא בחירה של n תאים מתוך $2n$ תאים ללא חשיבות לסדר וללא חזרות, כלומר $\binom{2n}{n}$ אפשרויות. בסך הכל $(2n)^n\binom{2n}{n}$ אפשרויות.
3. בבחירה של הכדורים הצבעוניים אנו בוחרים n תאים מתוך $2n$ תאים עם חשיבות לסדר וללא חזרה, כלומר $\frac{(2n)!}{n!}$ אפשרויות. בבחירה של הכדורים השקופים אין חשיבות לסדר (כי הם זהים), ואין מגבלה לגבי חזרות, כלומר $\binom{2n+n-1}{n}$ אפשרויות. בסך הכל $\frac{(2n)!}{n!}\binom{2n+n-1}{n}$ אפשרויות.
4. כדי לוודא שהתנאי מתקיים נצמיד לכל כדור צבעוני כדור שקוף. כעת מדובר בבחירה עם חשיבות לסדר ועם חזרה של n כדורים אל תוך $2n$ תאים. בסך הכל $(2n)^n$ אפשרויות.

תרגיל 3.10 (ממבחן)**.** בכמה דרכים ניתן לבחור שני מספרים שונים בין 1 לבין 100 שסכומם זוגי?

פתרון. שני המספרים צריכים להיות מאותה זוגיות. יש לנו שתי בחירות של שני מספרים מתוך 50 ללא חשיבות לסדר וללא חזרה, כלומר $\binom{50}{2}+\binom{50}{2}=2450$. בדרך אחרת: תחילה נבחר מספר מתוך 100, ואז בגלל הגבלת הזוגיות, נבחר מספר אחד מתוך 49. הסדר של הבחירה לא משנה, אז נחלק ב-$2!=2$, ונקבל $2450=\frac{100\cdot 49}{2}$.

תרגיל 3.11 (ממבחן)**.** בכמה דרכים ניתן לבחור שלושה מספרים שונים בין 1 לבין 100 שסכומם זוגי?

פתרון. יש שתי סוגי בחירות: שלושה מספרים זוגיים או שני מספרים אי־זוגיים ואחד זוגי. לכן יש בסך הכל $\binom{50}{3}+\binom{50}{2}\binom{50}{1}$ אפשרויות.

הערה 3.12. כמה פעמים השתמשנו מבלי לומר בעקרון הסכום: אם A,B קבוצות סופיות זרות, אז $|A\cup B|=|A|+|B|$. ניתן להסיק כי אם A,B קבוצות סופיות כך ש-$A\subseteq B$, אז $|B\setminus A|=|B|-|A|$. כמו כן השתמשנו בעיקרון המכפלה: אם A,B קבוצות סופיות, אז $|A\times B|=|A|\cdot|B|$. העקרון הזה נכון בחשבון עוצמות גם לקבוצות לא סופיות. לשני עקרונות אלו יש הרחבות גם ליותר משתי קבוצות.

תרגיל 3.13. כמה מספרים בני 4 ספרות ניתן להרכיב מן הספרות $\{1,3,5,7,9\}$ שמופיעה בהם הספרה 3?

פתרון. נתחיל עם פתרון שגוי: אם ספרת האלפים היא 3, אזי נשאר לבחור עם חזרה ועם חשיבות לסדר 3 איברים מתוך 5, כלומר $125=5^3$ אפשרויות. באופן דומה לספרת המאות, ספרת העשרות וספרת האחדות במספר. מעיקרון החיבור ($|A\cup B|=|A|+|B|$ עבור קבוצות זרות) נקבל כי סך הכל יש $500=4\cdot5^3$ מספרים כאלו.

הפתרון הנ"ל הוא שגוי כיוון שיש מספרים שספרנו כמה פעמים, כאלו שבהם הספרה 3 מופיעה יותר מפעם אחת כמו 3333.

נסמן ב-X את קבוצת כל המספרים בני 4 ספרות המורכבים מהספרות $\{1,3,5,7,9\}$, ונסמן ב-Y את כל המספרים שבהם הספרה 3 לא מופיעה בכלל. אז הקבוצה שאנו מחפשים את עוצמתה היא $X\setminus Y$. כעת, קל לראות כי $|X|=5^4=625$ וגם $|Y|=4^4=256$ ולכן ישנן $|X\setminus Y|=625-256=369$ אפשרויות.

3.2 המקדמים הבינומיים

נוכיח כמה זהויות לגבי המקדמים הבינומיים, הן בשיטות אלגבריות והן בשיטות קומבינטוריות.

משפט 3.14 (נוסחת הבינום של ניוטון [1, 4.3.1])**.** יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$. אז מתקיים

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

הוכחה. מוכיחים על ידי הצגה מפורשת של הביטוי $(a+b)^n$, ורואים כמה פעמים מופיע המונום a^kb^{n-k}. מגיעים למסקנה כי זה מספר הדרכים לבחור k פעמים בדיוק את a מתוך כל אחד מהגורמים באגף שמאל, וזהו המקדם הבינומי. $\square$

דוגמה 3.15. מנוסחת הבינום של ניוטון מקבלים את "נוסחאות הכפל המקוצר" מבית הספר:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

תרגיל 3.16. יהי $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו את הזהות הקומבינטורית הבאה:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

פתרון. דרך אלגברית לפתרון התרגיל הוא להציב $a = b = 1$ בנוסחת הבינום.

דרך קומבינטורית לפתרון התרגיל היא לשים לב שהביטוי באגף ימין סופר את מספר תת־הקבוצות של $\{1, \ldots, n\}$. באגף שמאל סופרים בדיוק את אותו דבר בצורה שונה, לפי מספר תת־הקבוצות בגודל k בכל פעם של $\{1, \ldots, n\}$.

תרגיל 3.17. יהי $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו את הזהות הקומבינטורית הבאה:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

פתרון. דרך אלגברית (לא נתעכב עליה עכשיו) היא להציב $a = 1$ ו-$b = x$ בנוסחת הבינום, לגזור, ולהציב $x = 1$.

דרך אלגברית אחרת היא לשים לב כי $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ ולהשתמש בתרגיל הקודם, כי כעת ניתן הוציא את הקבוע n.

דרך קומבינטורית לפתרון התרגיל היא לספור בשתי דרכים שונות את מספר תת־הקבוצות של $\{1, \ldots, n\}$ כאשר יש איבר מסומן בתת־הקבוצה. דרך אחת לבחור היא קודם לבחור מתוך $\binom{n}{k}$ תת־קבוצה בגודל k, ואז לסמן איבר מסוים. דרך אחרת היא קודם לבחור מתוך n האיברים את האיבר המסומן, ול- $n-1$ האיברים הנותרים יש 2^{n-1} תת־קבוצות.

משפט 3.18 (נוסחת פסקל)**.** יהיו $k, n \in \mathbb{N}$ כאשר $0 \le k \le n$. אז

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

הוכחה. דרך אלגברית להוכחת הנוסחה היא בתרגיל הבית.

דרך קומבינטורית היא לשים לב כי אגף ימין סופר את מספר תת־הקבוצות בגודל k של $\{1, \ldots, n\}$. אגף שמאל סופר את אותו דבר בדרך שונה: אפשר לתאר זאת לפי "סוג" תת־הקבוצה של $\{1, \ldots, n\}$ שמסתכלים עליה. סוג אחד הוא שבו האיבר n לא נמצא, ויש $\binom{n-1}{k}$ כאלו. הסוג השני הוא שבו האיבר n כן נמצא, ויש $\binom{n-1}{k-1}$ כאלו. $\square$

כעת ניתן להדגים כמה שורות ממשולש פסקל. הוא עזר זכרון נוח למקדמים הבינומיים. ניתן לשים לב לכך שהאיברים בסדרה $\binom{n}{k}$ עבור $0 \le k \le n$ בהתחלה עולים ואז יורדים. לסדרה עם תנאי כזה קוראים אונימודלית. קל לבדוק זאת בעזרת $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k}$.

תרגיל 3.19. יהיו $m, k, n \in \mathbb{N}$ כאשר $0 \le m \le k \le n$. אז

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

פתרון. נשאיר את הדרך האלגברית לבית.

בדרך קומבינטורית שני אגפי הזהות סופרים בכמה דרכים ניתן לבחור מתוך קבוצה של n סטודנטים k סטודנטים למועצה ומתוך k הסטודנטים במועצה הכללית לבחור m סטודנטים לועד העליון (אפשר להמחיש גם עם פרלמנט, קואליציה וממשלה (ואחר כך קבינט מצומצם)). אגף שמאל ברור. באגף ימין קודם בוחרים את m הסטודנטים לועד העליון, ואחר משלימים מתוך $n-m$ הסטודנטים שנותרו את החברים במועצה הכללית.

תרגיל 3.20. יהיו $k, n \in \mathbb{N}$ כאשר $0 \le k \le n$. אז

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

פתרון. הוכחה אלגברית בעזרת הבינום של ניוטון והצבה $a = 1$, $b = -1$.

דרך קומבינטורית לפתור היא להוכיח שמספר תת־הקבוצות של $\{1, \ldots, n\}$ בגודל זוגי שווה למספר תת־הקבוצות של $\{1, \ldots, n\}$ בגודל אי זוגי. עושים זאת על ידי התאמה חח"ע ועל שמוסיפה או מחסירה את האיבר n מכל קבוצה זוגית. שימו לב שלהתאים את הקבוצה המשלימה תכשל אם גם n וגם k זוגיים.

תרגיל 3.21. יהיו $k, n \in \mathbb{N}$ כאשר $0 \le k \le n$. אז

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$$

פתרון. בדרך אלגברית ניתן להוכיח זאת עם נוסחת פסקל או על ידי

$$2 \cdot 2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$$

ובעזרת החלפה $j = k-(n+1)$ ושימוש בזהות $\binom{2n+1}{j+n+1} = \binom{2n+1}{n-j}$ נקבל את הדרוש.

בדרך קומבינטורית אגף ימין הוא מספר תת־הקבוצות של $\{1,\ldots,2n+1\}$ שלא כוללות את האיבר $2n+1$. אגף שמאל סופר כמה תת־קבוצות של $\{1,\ldots,2n+1\}$ הן לכל היותר בגודל n. התאמה חח"ע ועל תתאים לתת־קבוצה שלא מכילה את $2n+1$ את עצמה אם היא לכל היותר בגודל n, ואחרת תתאים את המשלימה שלה (שחייבת להיות בגודל גדול מ-n).

3.3 פתרון בעיות מניה על ידי נוסחאות נסיגה

הגדרה 3.22. נגדיר באופן רקורסיבי את סדרת פיבונצ'י: תנאי ההתחלה הם $F_1 = F_2 = 1$ ונוסחת הנסיגה היא $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ לכל $n \geq 2$. דוגמה לכמה ערכים בסדרה: $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$.

כמה בעיות מניה שיש להן את אותה נוסחת נסיגה כמו לסדרת פיבונצ'י:

- מספר הדרכים לכסות לוח משבצות בגודל $2 \times n$ על ידי אבני דומינו.
- כנ"ל לגבי לוח בגודל $1 \times n$ על ידי אבני דומינו ומונומינו (שזה כמו מספר הצירופים של המספר n על ידי 1 ו-2).
- מספר תת הקבוצות של $\{1,\ldots,n\}$ שאינן מכילות זוג מספרים עוקבים.

הגדרה 3.23. מספרי סטירלינג מהסוג השני סופרים את מספר החלוקות של הקבוצה $\{1,\ldots,n\}$ ל-k חלקים (זרים, לא ריקים) בדיוק, עבור $1 \leq k \leq n$. הסימון שאנחנו נשתמש הוא $\left\{ {n \atop k} \right\}$ ומקובל גם $S(n,k)$. הפונקציה הזו מוגדרת על ידי נוסחת נסיגה: $\left\{ {n \atop 1} \right\} = \left\{ {n \atop n} \right\} = n$ ולכל $2 \leq k \leq n-1$,

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

(שימו לב לדמיון לנוסחת פסקל).

ברור שיש רק חלוקה אחת של $\{1,\ldots,n\}$ לחלק אחד, וזו היא עצמה. יש גם רק חלוקה אחת ל-n תת קבוצות: $\{\{1\},\ldots,\{n\}\}$. הסבר לנוסחת הנסיגה ניתן לראות כאשר מסתכלים על חלוקות שבהן $\{n\}$ הוא תת קבוצה, וחלוקות שבהן n נמצא בתת קבוצה יותר גדולה. לדוגמה

$$\left\{ {4 \atop 2} \right\} = \left\{ {3 \atop 1} \right\} + 2\left\{ {3 \atop 2} \right\} = \left\{ {3 \atop 1} \right\} + 2\left(\left\{ {2 \atop 1} \right\} + 2\left\{ {2 \atop 2} \right\} \right) = 1 + 2\,(1 + 2 \cdot 1) = 7$$

תרגיל 3.24. הוכיחו כי $\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{i=k-1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left\{ {i \atop k-1} \right\}$.

3.4 עקרון שובך היונים ועקרון ההכלה-הדחה

תרגיל 3.33. מסדרים את המספרים $\{1,\dots,10\}$ על מעגל בסדר שירורתי. הוכיחו שישנם שלשה מספרים שכנים על המעגל שסכומם לפחות 17.

פתרון. כמה שלשות (שלושה מספרים שכנים) יש על המעגל? 10 שלשות.

מה הסכום של כל השלשות? $(1+\dots+10)\cdot 3 = 5\cdot 11\cdot 3 = 165$. הסכום הממוצע של שלשה הוא 16.5. אם הממוצע גדול מ-16, אזי קיימת שלשה שסכומה הוא גדול מהממוצע.

אפשר להזכיר כי שאלה 4ג' בתרגיל בית 6 היא להוכיח שאם הממוצע של מספרים גדול ממש מ-k, אז לפחות אחד מן המספרים גדול ממש מ-k (הכללה של עקרון שובך היונים).

תרגיל 3.34 (תרגיל 2, עמוד 155)**.** בכמה דרכים ניתן לשלוף חמישה קלפים מחפיסת קלפים סטנדרטית כך שבקלפים שנבחרו תופענה כל ארבע הצורות?

(תזכורת: חפיסת קלפים סטנדרטית כוללת 52 קלפים ב-4 צורות של לב, תלתן, יהלום ועלה).

פתרון. דרך ראשונה: $13^4\cdot 48/2$. כדאי לנסות לפתח אותה לבד: צריך לבחור לפחות קלף אחד מכל צורה. כלומר 13^4. בנוסף אחר כך נשארו 48 קלפים שאפשר לבחור כל אחד מהם. כעת, יש לודא למה היינו צריכים לחלק ב-2.

דרך שניה: לפי הכלה הדחה, נסמן קבוצה אוניברסלית $|U|=\binom{52}{5}$, כל בחירה ללא חשיבות לסדר וללא חזרה של 5 קלפים מתוך 52. נסמן ב-$A_\triangle$ את קבוצת בחירות הקלפים שאינן כוללות את הצורה $\triangle$. לכן החישוב הוא

$$\begin{aligned}&|U|-\binom{4}{1}|A_\spadesuit|+\binom{4}{2}|A_\spadesuit\cap A_\diamondsuit|-\binom{4}{3}|A_\spadesuit\cap A_\diamondsuit\cap A_\clubsuit|+\binom{4}{4}|A_\spadesuit\cap A_\diamondsuit\cap A_\clubsuit\cap A_\heartsuit|\\&=\tbinom{52}{5}-\tbinom{4}{1}\tbinom{52-1\cdot 13}{5}+\tbinom{4}{2}\tbinom{52-2\cdot 13}{5}-\tbinom{4}{3}\tbinom{52-3\cdot 13}{5}+\tbinom{4}{4}\tbinom{52-4\cdot 13}{5}\\&=685464=\frac{13^4\cdot 48}{2}\end{aligned}$$

3.5 מבוא לתורת הגרפים

ראו הגדרות יסודיות בפרק 5.1 בספר ובקישור הזה.

הגדרה 3.35. גרף $G=(V,E)$ נקרא קשיר אם יש מסלול בין כל זוג קודקודים. (תרגיל: הגדירו רכיבי קשירות בעזרת יחס שקילות על קודקודי G.)

אפשר לראות שגרף הוא קשיר אם ורק אם הוא אינו איחוד זר של גרפים.

הגדרה 3.36. יהי גרף $G=(V,E)$. הגרף המשלים של G הוא הגרף $\overline{G}=(V,\overline{E})$, שקבוצת הקודקודים שלו זהה לקבוצת הקודקודים של G, ואילו שני קודקודים שונים u,v יהיו שכנים ב-$\overline{G}$ אם ורק אם אינם שכנים ב-G.

הגדירו איחוד של גרפים פשוטים ובדקו שברור כי אם G הוא גרף מסדר n, אז מתקיים $G\cup\overline{G}=K_n$.

תרגיל 3.37. יהי G גרף לא מכוון שאיננו קשיר. הוכיחו כי הגרף המשלים $\overline{G}$ קשיר והקוטר שלו הוא לכל היותר 2.

תרגיל 3.38. יהי G גרף לא מכוון מסדר n שבו לכל קודקוד יש דרגה קטנה ממש מ-$\sqrt{n-1}$. הוכיחו שהקוטר של G הוא לפחות 3.

הגדרה 3.39. גרף G שבו לכל קודקוד דרגה זהה k נקרא k-רגולרי.

1. גרפים 0-רגולריים הם הגרפים הריקים.
2. גרפים 1-רגולריים הם איחוד זר של עותקים של K_2.
3. גרפים 2-רגולריים פשוטים הם איחוד זר של מעגלים מסדרים גדולים או שווים 3.
4. דוגמה לכמה גרפים 3-רגולריים פשוטים: K_4, משושה או מתומן ולחבר כל קודקוד ל"נגדי" שלו, גרף הקוביה.
5. גרפים $(n-1)$-רגולריים מסדר n הם רק הגרף השלם K_n.

מקורות

[1] נ. ליניאל ומ. פרנס, מתמטיקה בדידה, הוצאת נ. בן צבי.

[2] www.math-wiki.com