התכנסות סדרת משתנים מקריים

תזכורת

תהי Y_n סדרת משתנים מקריים.

1. התכנסות כמעט בוודאות:

$Y_n \overset{a.s}{\to} \alpha$ אם:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} Y_n = \alpha\right) = 1$$

החוק החזק של המספרים הגדולים:

$$\overline{X_n} \overset{a.s}{\to} \mu$$

2. התכנסות בהסתברות:

$Y_n \overset{P}{\to} \alpha$ אם:

$$\forall\varepsilon:\ \lim_{n\to\infty} P(|Y_n-\alpha|<\varepsilon) = 1$$

החוק החלש של המספרים הגדולים:

$$\overline{X_n} \overset{P}{\to} \mu$$

3. התכנסות בהתפלגות:

$Y_n \overset{D}{\to} \alpha$ אם:

$$\forall a:\ \lim_{n\to\infty} P(Y_n\le a) = P(Y\le a)$$

■

דוגמה

יהיו $X_n \sim b\left(\frac{1}{2}\right)$ ובלתי תלויים.

$$Y_n := \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\cdot X_k \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\cdot X_k$$

$$\Downarrow$$

$$Y_n \xrightarrow{D} U[0,1]$$

■

משפט הגבול המרכזי

יהיו $X_1, X_2, \cdots$ משתנים מקריים שווי התפלגות ובלתי תלויים, עם תוחלת μ ושונות σ^2.

אז:

$$\boxed{\frac{\overline{X_n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{D} N(0,1)}$$

הערה

$$n^\theta \cdot \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \xrightarrow{D} \begin{cases} 0\,, & \theta < \frac{1}{2} \\ N(0,1)\,, & \theta = \frac{1}{2} \\ \infty\,, & \theta > \frac{1}{2} \end{cases}$$

למה 1

יהי X משתנה מקרי.

אם $M_{X(t)}$ מוגדרת לכל $t \in \mathbb{R}$, אז $M_{X(t)}$ קובעת את ההתפלגות של X.

למה 2

תהי X_n סדרת משתנים מקריים.

אם $M_X(t) \xrightarrow{n\to\infty} M_{X_n}(t)$ לכל $t \in \mathbb{R}$, אז $X_n \xrightarrow{D} X$.

הוכחת המשפט

לכל $n \in \mathbb{N}$, נגדיר:

$$Y_n := \frac{X_n - \mu}{\sigma}$$

כעת:

$$E(Y_n) = 0 \quad ; \quad V(Y_n) = 1$$

למעשה:

$$\overline{Y_n} = \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}$$

נוכיח:

$$\sqrt{n} \cdot \overline{Y_n} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

נתבונן בפונקציה $M_Y(t)$.

נרצה לקבל נוסחה עבור $M_Y(t)$.

נניח שהפונקציה הנ"ל מוגדרת לכל $t \in \mathbb{R}$.

מתקיים:

$$M_Y(0) = 1$$

$$M'_Y(0) = E(Y) = 0$$

$$M''_Y(0) = E(X^2) = 1$$

עפ"י ההגדרה של הפונקציה יוצרת המומנטים:

$$M_{\sqrt{n}\cdot\overline{Y_n}}(t) = E\left(e^{t\cdot\sqrt{n}\cdot\overline{Y_n}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$M_{\sqrt{n}\cdot\overline{Y_n}}(t) = E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}\cdot(Y_1+\cdots+Y_n)}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$M_{\sqrt{n}\cdot\overline{Y_n}}(t) = E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}\cdot Y_1}\cdots e^{\frac{t}{\sqrt{n}}\cdot Y_n}\right)$$

X_i בלתי תלויים, לכן:

$$M_{\sqrt{n}\cdot\overline{Y_n}}(t) = E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}\cdot Y_1}\right)\cdots E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}\cdot Y_n}\right)$$

X_i שווי התפלגות, לכן:

$$M_{\sqrt{n}\cdot\overline{Y_n}}(t) = M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$$

נפעיל log, ונקבל:

$$\log M_{\sqrt{n}\cdot\overline{Y_n}}(t) = n \cdot \log M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\log M_{\sqrt{n}\cdot\overline{Y_n}}(t) = \frac{\log M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n}}$$

$$\Downarrow$$

$$\log M_{\sqrt{n}\cdot\overline{Y_n}}(t) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \frac{\frac{\left(M_Y'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\cdot t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot n^{-\frac{3}{2}}\right)}{M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}}{-\frac{1}{n^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\log M_{\sqrt{n}\cdot\overline{Y_n}}(t) = \frac{M_Y{}'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{n^{-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\overbrace{t}^{\xrightarrow{n\to\infty}\frac{t}{2}}}{2\cdot M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\log M_{\sqrt{n}\cdot\overline{Y_n}}(t) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \frac{M_Y''\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\cdot t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot n^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{2}\cdot n^{-\frac{3}{2}}}\cdot\frac{t}{2\cdot M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\log M_{\sqrt{n}\cdot\overline{Y_n}}(t) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{t^2}{2}$$

לכן, לכל $t\in\mathbb{R}$:

$$M_{\sqrt{n}\cdot\overline{Y_n}}(t)\xrightarrow{n\to\infty}e^{\frac{t^2}{2}}\overset{\text{למה }1}{=}M_{N(0,1)}(t)$$

עפ"י למה (2):

$$\sqrt{n}\cdot\overline{Y_n}\overset{D}{\to}N(0,1)$$

לכן:

$$\boxed{\frac{\overline{X_n}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\overset{D}{\to}N(0,1)}$$

■

מסקנה

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\overline{X_n}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le z\right)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

מקרה פרטי חשוב

נניח ש: $X_i\sim b(p)$ ובלתי תלויים.

לכן:

$$\overline{X_n}=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim Bin(n,p)$$

עפ"י משפט הגבול המרכזי, עבור $n\in\mathbb{N}$ "גדול":

$$\frac{\frac{1}{n}\cdot Bin(n,p)-p}{\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$$

לכן, בקירוב "טוב":

$$Bin(n,p)\sim N(np,npq)$$

זהו "הקירוב הנורמלי של ההתפלגות הבינומית".

■

דוגמה

$n = 50$, $X \sim Bin\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

<u>שאלה</u>

מה הסיכוי ש : $X > 29$? מה הסיכוי ש : $X \geq 30$?

<u>פתרון 1</u>

$$P(X > 29) = \sum_{k=30}^{50} P(X = k)$$

$$\Downarrow$$

$$P(X > 29) = \sum_{k=30}^{50} \left(\frac{1}{2}\right)^{50} \cdot \binom{50}{k}$$

$$\square$$

<u>פתרון 2</u>

בקירוב : $X \sim N\left(25, \frac{50}{4}\right)$.

$$P(X > 29) = P\left(\frac{X - 25}{\sqrt{\frac{50}{4}}} > \frac{29 - 25}{\sqrt{\frac{50}{4}}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$P(X > 29) = P\left(\frac{X - 25}{\sqrt{\frac{50}{4}}} < 1.13\right)$$

$$\Downarrow$$

$$P(X > 29) = P(Z > 1.13)$$

$$\Downarrow$$

$$P(X > 29) = 12.92\%$$

□

עבור $P(X \geq 30)$ נקבל תוצאה שונה, לכן נשתמש ב"תיקון הרציפות", ונחשב את:

$$P(X > 29.5)$$

■

ככל אצבע

הקירוב הנורמלי תקף כאשר $n \geq 30$ ו - $np, nq > 5$.

אם n גדול ו - np קטן, מפעילים את קירוב פואסון.

דוגמה

מטילים מטבע הוגן.

א' מנצח כאשר שהופיע הרצף 0000.

ב' מנצח כאשר שהופיע הרצף 0010.

<u>שאלה</u>

מה הסיכוי של א' לנצח?

כמה זמן (בתוחלת) ימשך המשחק?

<u>פתרון</u> (בהרצאה הבאה)

הגדרה

שרשרת מרקוב היא סדרת משנים מקריים $X_0, X_1, \cdots$ כך שלכל $m < n$, בהינתן X_n, המשתנה X_m בלתי תלוי בווקטור $X_0, \cdots, X_{n-1}$.

כלומר, ההתפלגות של X_m בהינתן $X_{i_1}, \cdots, X_{i_k}$, תלויה רק ב: $X_{\max\{i_j\}}$.

■