פתרון תרגיל 2 אינפי 3 תשע"ז

13 בדצמבר 2016

1. נפריך ונוכיח ביד רמה.

(א) לא בהכרח. נתבונן בפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases}\left|\frac{x+y}{x-y}\right| & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

אם מקבעים את x או את y הפונקציה אכן רציפה לפי המשתנה השני:

$$\lim_{x\to0}f(x,0)=\left|\frac{x}{x}\right|=1,\lim_{y\to0}f(0,y)=\left|\frac{y}{-y}\right|=1$$

אבל לכל k נקבל במסלולים $y=kx$ גבולות שונים ולכן הפונקציה אינה רציפה.

(ב) הוכחה. נראה שלכל $D\in(x_0,y_0)$ המקיימים $|(x,y)-(x_0,y_0)|<\delta$, מתקיים $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$. ובכן:

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leq|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\leq$$

$$\leq K|y-y_0|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|$$

f רציפה לפי x כלומר אם $|x-x_0|<\delta'$ אז לכל y,

$$|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon'$$

נבחר $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{2}$ ונבחר:

$$\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2K},\delta'\right\}$$

ואם נחזור לאי־השוויון נקבל:

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<K\cdot\frac{\varepsilon}{2K}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ולכן הפונקציה רציפה.

2. מכיוון שהפונקציה f רציפה על קבוצה קומפקטית יש לה מינימום ומקסימום ב$-K$.

נסמן את ערך המינימום ב$-a$.

לכן, קיימת $(x_0,y_0)\in K$ כך ש$-a=f(x_0,y_0)$ ולכל $(x,y)\in K$ מתקיים:

$$a\leq f(x,y)$$

תר על כן, ברור שמתקיים:

$$f(x,y)=x^2+\sin^2\left(e^{\frac{x}{y}}\right)\geq 0$$

נניח בשלילה שקיימת $(x,y)\in K$ עבורה $f(x,y)=0$. כלומר:

$$x^2=0\wedge\sin^2\left(e^{\frac{x}{y}}\right)=0$$

מהשיוויון הראשון נקבל $x=0$ אך זה נותן $\sin^2\left(e^{\frac{0}{y}}\right)=\sin^2 1\neq 0$ וסתירה!

לכן לא קיימת נקודה (x,y) כזו ולכן $f(x,y)>0$ לכל נקודה $(x,y)\in K$; בפרט, $f(x_0,y_0)=a>0$.

3. כאשר גוזרים לפי משתנה מסוים ־ מתייחסים אל האחרים כאל קבועים.

(א) נגזור לפי x:

$$f_x(x,y)=3x^2-\frac{1}{y}$$

והיא מוגדרת כאשר $y\neq 0$.

נגזור לפי y:

$$f_y(x,y)=6y+\frac{x}{y^2}$$

והיא מוגדרת כאשר $y\neq 0$.

(ב) נגזור לפי x:

$$f_x\left(x,y\right)=e^{\cos(xy)}\sin\left(xy\right)y$$

ובאופן דומה נגזור לפי y:

$$f_y\left(x,y\right)=e^{\cos(xy)}\sin\left(xy\right)x$$

ושתי הנגזרות מוגדרות בכל $\mathbb{R}^2$.

(ג) נגזור לפי x:

$$f_x\left(x,y\right)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ובאופן דומה הנגזרות לפי z,y הן:

$$f_z\left(x,y\right)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},f_y\left(x,y\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ושלוש הנגזרות מוגדרות בכל $\mathbb{R}^3$ למעט $(0,0,0)$.

(ד) נגזור לפי x:

$$f_x\left(x,y\right)=\frac{3x^2}{x^3+y^3-z^3}$$

ובאופן דומה הנגזרות לפי z,y הן:

$$f_z\left(x,y\right)=\frac{-3z^2}{x^3+y^3-z^3},f_y\left(x,y\right)=\frac{3y^2}{x^3+y^3-z^3}$$

ובהתחשב בתחום ההגדרה של $\ln$, הן מוגדרות בתחום $x^3+y^3-z^3>0$.