מערך תרגול 8

תזכורת 1

1. תהי $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ עקומה מישורית ו־ $x:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ משטח. אז $\beta=x\circ\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ עקומה מרחבית שנמצאת על המשטח. היא מקיימת

$$\beta''=\left(\alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime}\Gamma_{ij}^{k}+\alpha^{k\prime\prime}\right)x_k+\left(L_{ij}\alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime}\right)n$$

2. נאמר כי $\beta(s)=x\circ\alpha$ עקומה גאודזית על המשטח x אם

$$\alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime}\Gamma_{ij}^{k}+\alpha^{k\prime\prime}=0$$

לכל k. זו מערכת של שתי משוואות, הנקראות המשוואות הגאודזית. באופן שקול, הוקטור β'' מאונך למשטח ו־ $\beta''=L_{ij}\alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime}n$.

תרגיל 1 המשוואה הגאודזית

$$\alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime}\Gamma_{ij}^{k}+\alpha^{k\prime\prime}=0$$

רשומה באמצעות הסכם הסכימה של איינשטין. רישמו אותה מפורשות.

פתרון 1 ראשית כאמור מדובר בשתי משוואות, עבור $k=1,2$:

$$\begin{cases}\alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime}\Gamma_{ij}^{1}+\alpha^{1\prime\prime}=0\\ \alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime}\Gamma_{ij}^{2}+\alpha^{2\prime\prime}=0\end{cases}$$

כל אחת מהמשוואות רשומה באמצעות הסכם הסכימה של איינשטין:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime}\Gamma_{ij}^{1}+\alpha^{1\prime\prime}=0\\ \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime}\Gamma_{ij}^{2}+\alpha^{2\prime\prime}=0\end{cases}$$

כלומר מפורשות:

$$\begin{cases}\left(\alpha^{1\prime}\right)^2\Gamma_{11}^{1}+2\alpha^{1\prime}\alpha^{2\prime}\Gamma_{12}^{1}+\left(\alpha^{2\prime}\right)^2\Gamma_{22}^{1}+\alpha^{1\prime\prime}=0\\ \left(\alpha^{1\prime}\right)^2\Gamma_{11}^{2}+2\alpha^{1\prime}\alpha^{2\prime}\Gamma_{12}^{2}+\left(\alpha^{2\prime}\right)^2\Gamma_{22}^{2}+\alpha^{2\prime\prime}=0\end{cases}$$

אפשר לכתוב גם ככה:

$$\begin{cases}\left(\frac{d\alpha^1}{ds}\right)^2\Gamma_{11}^{1}+2\frac{d\alpha^1}{ds}\frac{d\alpha^2}{ds}\Gamma_{12}^{1}+\left(\frac{d\alpha^2}{ds}\right)^2\Gamma_{22}^{1}+\frac{d^2\alpha^1}{ds^2}=0\\ \left(\frac{d\alpha^1}{ds}\right)^2\Gamma_{11}^{2}+2\frac{d\alpha^1}{ds}\frac{d\alpha^2}{ds}\Gamma_{12}^{2}+\left(\frac{d\alpha^2}{ds}\right)^2\Gamma_{22}^{2}+\frac{d^2\alpha^2}{ds^2}=0\end{cases}$$

תרגיל 2 מיצאו את העקומות הגיאודזיות על הגליל

$$x(\theta,\phi)=(\cos\theta,\sin\theta,\phi)$$

פתרון 2 ראיתם בהרצאה ובתרגיל בית כי $\Gamma_{ij}^k=0$ לכל i,j,k. לכן המשוואות הגאודזיות הן

$$\begin{cases}\alpha^{1''}=0\\ \alpha^{2''}=0\end{cases}$$

נפתור את $\alpha^{1''}=0$:

$$\begin{aligned}\alpha^{1''}&=0\\ \alpha^{1'}&=\int 0ds=C_1\\ \alpha^1&=\int C_1ds=C_1s+C_2\end{aligned}$$

באשר $C_1,C_2\in\mathbb{R}$. באותו האופן מ־ $\alpha^{2''}=0$ מקבלים $\alpha^2=C_3s+C_4$.
לכן מצאנו שהעקומות הגיאודזיות הן $\beta(s)=x\circ\alpha(s)$ עבור

$$\alpha(s)=(C_1s+C_2,C_3s+C_4)=(C_1,C_3)s+(C_2,C_4)$$

כלומר הן תמונות של קווים ישרים:

$$\begin{aligned}\beta(s)=x(\alpha(s))&=x(C_1s+C_2,C_3s+C_4)\\ &=(\cos(C_1s+C_2),\sin(C_1s+C_2),C_3s+C_4)\end{aligned}$$

תזכורת 2

1. נאמר שהמטריקה g_{ij} שקולה קונפורמית למטריקה השטוחה הסטנדרטית אם יש פונקציה $\lambda(u^1,u^2)>0$ כך ש־ $g_{ij}=\lambda\delta_{ij}$ לכל i,j. ל־ λ קוראים הגורם הקונפורמי.
2. נסמן $\lambda_i=\frac{\partial\lambda}{\partial u^i}$. אז

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1&=\frac{\lambda_1}{2\lambda},\quad \Gamma_{22}^1=\frac{-\lambda_1}{2\lambda},\quad \Gamma_{12}^1=\frac{\lambda_2}{2\lambda}\\ \Gamma_{11}^2&=\frac{-\lambda_2}{2\lambda},\quad \Gamma_{22}^2=\frac{\lambda_2}{2\lambda},\quad \Gamma_{12}^2=\frac{\lambda_1}{2\lambda}\end{aligned}$$

בפרט, $\Gamma_{11}^1+\Gamma_{22}^1=0$ וכן $\Gamma_{11}^2+\Gamma_{22}^2=0$.

תרגיל 3 בקואורדינטות $(u^1,u^2)=(x,y)$ מיצאו את המשוואות הגאודזיות של משטח בעל המטריקה

$$(g_{ij}(x,y))=\begin{pmatrix}y&0\\0&y\end{pmatrix}$$

עבור $y>0$.

פתרון 3 שבוע שעבר חישבנו ישירות כי עבור מטריקה זו מקבלים

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{11} &= \frac{-1}{2y}\\ \Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2y}\\ \Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2y}\end{aligned}$$

ו־ $\Gamma^k_{ij} = 0$ אחרת. נוודא זאת, הפעם באמצעות הנוסחאות עבור מטריקה השקולה קונפורמית למטריקה שטוחה סטנדרטית. מתקיים $g_{ij} = y\delta_{ij}$ כלומר $\lambda(x,y) = y > 0$ הגורם קונפורמי. מתקיים

$$\lambda_1 = \frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0, \quad \lambda_2 = \frac{\partial\lambda}{\partial y} = 1$$

לכן אכן

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{11} &= \frac{\lambda_1}{2\lambda} = 0\\ \Gamma^1_{22} &= \frac{-\lambda_1}{2\lambda} = 0\\ \Gamma^1_{12} &= \frac{\lambda_2}{2\lambda} = \frac{1}{2y}\\ \Gamma^2_{11} &= \frac{-\lambda_2}{2\lambda} = \frac{-1}{2y}\\ \Gamma^2_{22} &= \frac{\lambda_2}{2\lambda} = \frac{1}{2y}\\ \Gamma^2_{12} &= \frac{\lambda_1}{2\lambda} = 0\end{aligned}$$

כעת, המשוואות הגאודזיות הן

$$\begin{aligned}\alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime}\Gamma^1_{ij} + \alpha^{1\prime\prime} &= 0\\ \alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime}\Gamma^2_{ij} + \alpha^{2\prime\prime} &= 0\end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned}&\frac{1}{y}\alpha^{1\prime}\alpha^{2\prime} + \alpha^{1\prime\prime} = 0\\ &\frac{1}{2y}\left(\left(\alpha^{2\prime}\right)^2 - \left(\alpha^{1\prime}\right)^2\right) + \alpha^{2\prime\prime} = 0\end{aligned}$$

לסיום נשתמש בסימון אחיד לקואורדינטות. הרי $(x,y) = (\alpha^1(s), \alpha^2(s))$, לכן נבחר לעבוד למשל עם x, y:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{y}x'y' + x'' = 0\\ &\frac{1}{2y}\left((y')^2 - (x')^2\right) + y'' = 0\end{aligned}$$

באשר

$$.x' = \frac{dx}{ds}, \quad y' = \frac{dy}{ds}$$

תרגיל 4 נתון המשטח הבא ב־ $\mathbb{R}^3$:

$$M = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = y^3 \right\}$$

הוכיחו שהקו

$$L = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y = z = 0 \right\}$$

הוא עקומה גיאודזית של M.

פתרון 4 נמצא פרמטריזציה למשטח:

$$x(u^1, u^2) = (u^1, u^2, (u^2)^3)$$

נסתכל על העקומה המישורית

$$\alpha(s) = (s, 0) = (\alpha^1(s), \alpha^2(s))$$

מתקיים $\beta(s) = x \circ \alpha(s) = (s, 0, 0)$ כלומר תמונת β היא אכן הקו L. נשים לב כי זהו קו ישר, לכן בפרט גאודז: אכן, מתקיים $\beta'(s) = (1,0,0)$ לכן $\beta''(s) = (0,0,0)$ ובפרט

$$\alpha^{i'} \alpha^{j'} \Gamma^k_{ij} + \alpha^{k''} = 0$$

לכל k, כלומר β עקומה גאודזית, מש"ל. [1]

[1] לשם התרגול נראה זאת גם ישירות, כלומר כך היינו עושים אם לא היינו שמים לב ש־ $\beta''(s) = \vec{0}$: מתקיים $\alpha^{1'} = 1, \quad \alpha^{2'} = 0, \quad \alpha^{1''} = 0, \quad \alpha^{2''} = 0$, כלומר המשוואות הגיאודזיות הן

$$\begin{cases} 1^2\Gamma^1_{11} + 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \Gamma^1_{12} + 0^2\Gamma^1_{22} + 0 = 0 \\ 1^2\Gamma^2_{11} + 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \Gamma^2_{12} + 0^2\Gamma^2_{22} + 0 = 0 \end{cases}$$

כלומר

$$\begin{cases} \Gamma^1_{11} = 0 \\ \Gamma^2_{11} = 0 \end{cases}$$

כלומר הקו הישר L הוא עקומה גיאודזית אם ורק אם $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = 0$, לכן נשאר רק לחשב מקדמים אלה.
נחשב את המטריקה: $x_1 = (1,0,0), \;\; x_2 = (0,1,3(u^2)^2)$ כלומר

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + 9(u^2)^4 \end{pmatrix}, \quad (g_{ij;1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (g_{ij;2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 36(u^2)^3 \end{pmatrix}$$

כלומר $g_{22;2} = 36(u^2)^3$ וכל שאר $g_{ij;k}$ הם 0. לכן

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\left(\overbrace{g_{11;1}}^{0} - \overbrace{g_{11;1}}^{0} + \overbrace{g_{11;1}}^{0} \right) g^{11} = 0$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}\left(\overbrace{g_{12;1}}^{0} - \overbrace{g_{11;2}}^{0} + \overbrace{g_{12;1}}^{0} \right) g^{22} = 0$$

כדרוש.

תרגיל 5 בקואורדינטות $(u^1,u^2)=(x,y)$, נניח $h(x,y)=Cx$ כאשר $C>0$ ונתבונן במטריקה מוגדרת על ידי נוסחה

$$h(x,y)^{-2}\delta_{ij}.$$

נשים לב כי המטריקה לא מוגדרת עבור $x=0$ לכן אנחנו מסתכלים בעצם על חצי מישור ימני.

1. חשבו את המקדמים $\Gamma^1_{22},\Gamma^1_{12},\Gamma^1_{21},\Gamma^1_{11}$ של המטריקה.
2. בטאו משוואה דיפרנציאלית של קו גאודזי של המטריקה.

פתרון 5

1. המטריקה שקולה קונפורמית למטריקה שטוחה סטנדרטית, עם גורם קונפורמי

$$\lambda(x,y)=C^{-2}x^{-2}>0.$$

מתקיים

$$\lambda_1=\frac{\partial\lambda}{\partial x}=-2C^{-2}x^{-3}$$
$$\lambda_2=\frac{\partial\lambda}{\partial y}=0$$

לכן

$$\Gamma^1_{11}=\frac{\lambda_1}{2\lambda}=\frac{-2C^{-2}x^{-3}}{2C^{-2}x^{-2}}=-x^{-1}$$
$$\Gamma^1_{22}=\frac{-\lambda_1}{2\lambda}=-\Gamma^1_{11}=x^{-1}$$
$$\Gamma^1_{12}=\frac{\lambda_2}{2\lambda}=0$$

באשר השתמשנו ביחס $\Gamma^1_{11}+\Gamma^1_{22}=0$.

2. אם $\beta(s)=x\circ\alpha(s)$ עקומה גאודזית אז

$$\left(\frac{d\alpha^1}{ds}\right)^2\Gamma^1_{11}+2\frac{d\alpha^1}{ds}\frac{d\alpha^2}{ds}\Gamma^1_{12}+\left(\frac{d\alpha^2}{ds}\right)^2\Gamma^1_{22}+\frac{d^2\alpha^1}{ds^2}=0$$

כלומר

$$-x^{-1}\left(\frac{d\alpha^1}{ds}\right)^2+x^{-1}\left(\frac{d\alpha^2}{ds}\right)^2+\frac{d^2\alpha^1}{ds^2}=0$$

כלומר כיוון ש־ $\alpha(s)=(\alpha^1(s),\alpha^2(s))=(x,y)$ אז נקבל שהמשוואה הראשונה היא

$$\frac{-1}{x}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\frac{1}{x}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\frac{d^2x}{ds^2}=0$$

באותו אופן המשוואה השניה:

$$\Gamma^2_{22} = \frac{\lambda_2}{2\lambda} = 0$$
$$\Gamma^2_{11} = \frac{-\lambda_2}{2\lambda} = 0$$
$$\Gamma^2_{12} = \frac{\lambda_1}{2\lambda} = -x^{-1}$$

לכן

$$\left(\frac{d\alpha^1}{ds}\right)^2 \Gamma^2_{11} + 2\frac{d\alpha^1}{ds}\frac{d\alpha^2}{ds}\Gamma^2_{12} + \left(\frac{d\alpha^2}{ds}\right)^2 \Gamma^2_{22} + \frac{d^2\alpha^2}{ds^2} = 0$$

כלומר

$$-x^{-1}\frac{d\alpha^1}{ds}\frac{d\alpha^2}{ds} + \frac{d^2\alpha^2}{ds^2} = 0$$

כלומר

$$\frac{-1}{x}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + \frac{d^2y}{ds^2} = 0$$