אלגברה מופשטת 1, תרגיל בית 5

מתרגלים: סולי וישקאוצן ואדם צ'פמן. להגשה ב11.12 או ב14.12 בהתאם לשיעור התרגיל.

1) אם G היא חבורה לא אבלית מסדר 6 אזי היא כוללת איבר a מסדר שלוש ואיבר b מסדר שתיים ומתקיים $G=\{1,a,a^2,b,ab,a^2b\}$. הוכח כי $ba=a^2b$, וכי G איזומורפית ל S_3 [=חבורת התמורות בשלושה איברים].

פיתרון:

אם $ba=1$ אזי $b=a^{-1}$ וזו סתירה גם לאבליות וגם לסדרים של a ו b.

אם $ba=a$ אזי $b=e$ וזו סתירה גם לאבליות וגם לסדר של b.

אם $ba=a^2$ אזי $b=a$ וזו סתירה גם לאבליות וגם לסדר של b.

אם $ba=b$ אזי $a=e$ סתירה גם לאבליות וגם לסדר של a.

אם $ba=ab$ אזי זו סתירה לאבליות .

מכיוון שהחבורה G סגורה לכפל, אזי $ba\in G$ ומכיוון שאינו יכול להיות שווה לאף איבר אחר, אנו מקבלים $ba=a^2b$.

2) הראו כי $\mathbb{Q}(i)\setminus\{0\}$ [=החבורה הכפלית הנוצרת מהמספרים הרציונליים והמספר המרוכב i] אינה איזומורפית ל$\mathbb{Q}(\sqrt{2})\setminus\{0\}$ [=החבורה הכפלית הנוצרת מהמספרים הרציונליים והשורש של 2].

פיתרון:

החבורה $\mathbb{Q}(i)\setminus\{0\}$ כוללת איבר מסדר 4, i. לעומתה, החבורה $\mathbb{Q}(\sqrt{2})\setminus\{0\}$ אינה כוללת אף איבר מסדר זה ולכן אינן איזומורפיות.

3) יהיו H,K תת-חבורות של G. הוכיחו כי HK תת-חבורה של G אם ורק אם $HK=KH$.

פיתרון:

$(\Leftarrow)$

נניח $HK\le G$. $(HK)^{-1}=K^{-1}H^{-1}=KH$. מכיוון ש HK חבורה אז היא שווה לקבוצת האיברים ההפוכים שלה, כלומר מתקיים

$HK=(HK)^{-1}=K^{-1}H^{-1}=KH$.

$(\Rightarrow)$

נניח $HK=KH$. אזי HK כוללת את ההפכיים של איבריה. נותר להראות כי היא סגורה לכפל. יהיו שני איברים $h_1k_1,h_2k_2\in HK$. מכיוון ש $HK=KH$ קיימים $k_3\in K$ ו $h_3\in H$ שעבורם $h_3k_3=k_1h_2$, ולכן

$h_1k_1h_2k_2=h_1h_3k_3k_2\in HK$.

4) תהי G חבורת המטריצות מהצורה $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ כאשר $a,b\in\mathbb{R}$ ו-$a\neq 0$ עם פעולת הכפל של מטריצות (אין צורך להראות כי זו חבורה) ותהי H תת החבורה של G של המטריצות מהצורה $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ באשר $c\in\mathbb{R}$. תנו תיאור מלא של הקבוצת המחלקות השמאליות של H ב-G.

פיתרון:

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ac+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $c \in \mathbb{R}$ יחיד כך

ש $ac+b = x$ (זהו $c = \dfrac{x-b}{a}$ כמובן) ולכן

$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$ $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. משמע, המחלקות השמאליות של H ב- G

הן $\left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = A_a$ לכל $0 \neq a \in \mathbb{R}$.

5) תהי $G = \{1,-1,i,j,ij,-i,-j,-ij\}$ חבורה עם פעולת כפל המוגדרת

$i^2 = j^2 = -1$ ו $ji = -ij$. מצאו תת-חבורה H כך ש $[G:H] = 4$. עבור

אותה תת-חבורה, מצאו את המחלקות השמאליות והמחלקות הימניות שלה.

פיתרון:

ניקח את תת-החבורה $H = \{1,-1\}$. מכיוון ש $|H| = 2$ ו $|G| = 8$ אז

אוטומטית מתקיים $[G:H] = 4$.

המחלקות השמאליות של H הן H, $iH = \{i,-i\}$, $jH = \{j,-j\}$

ו $ijH = \{ij,-ij\}$.

כמו-כן, המחלקות הימניות של H הן H, $Hi = \{i,-i\}$, $Hj = \{j,-j\}$

ו $Hij = \{ij,-ij\}$.