<u>מבנים דיסקרטיים – תרגיל בית 7</u>

<u>להגשה 11.6.2013</u>

בתרגול לא הספקנו להראות, אבל ניתן להשתמש באלגוריתם מציאת המחלק המשותף המקסימלי של שני איברים כדי להציג אותו כצירוף אלגברי של שני האיברים, כלומר $\gcd(a,b)=au+bv$. לדוגמה הראינו בתרגול:

<u>דוגמא:</u> נפעיל את אלגוריתם הבניה עבור הדוגמא: gcd(234,61)=1.

$$234=61\times 3+51$$

$$61=51\times 1+10$$

$$51=10\times 5+1$$

$$10=1\times 10$$

ואז נקבל:

$$\gcd(234,61)=\gcd(61,51)=\gcd(51,10)=\gcd(5,1)=1.$$

את הצירוף האלגברי המתאים נקבל ע"י הצגת כל שארית כצירוף אלגברי מתאים של השאריות הקודמות:

$$1=51-10\times 5$$
$$10=61-51\times 1$$
$$51=234-61\times 3$$
$$\Rightarrow$$
$$1=51-10\times 5=(234-61\times 3)-(61-51\times 1)\times 5=(234-61\times 3)-(61-(234-61\times 3)\times 1)\times 5=$$
$$=6\times 234+(-23)\times 61$$

1. מצאו את המחלק המשותף המקסימלי של זוגות הפולינומים הבאים מעל $\mathbb{Q}$, והציגו אותו כצירוף אלגברי שלהם.
   a. $x^5-6x+1,\ \ x^3-6x^2+x+4$
   b. $x^2+1,\ \ x^6+x^3+x+1$
2. מצאו את המחלק המשותף המקסימלי של $x^5+x^4+x^2+x, x^5+x^2$ מעל $\mathbb{Z}_2$ והציגו אותו כצירוף אלגברי של שני האיברים.
3. הראו שאם R תחום שלמות, אזי כל איבר הפיך ב $R[x]$ הוא איבר הפיך ב R.
4. יהי R חוג. נאמר שאיבר $a\in R$ הוא נילפוטנטי אם קיים n טבעי כך ש $a^n=0$.

a. הראו שבתחום שלמות אין איברים נילפוטנטיים פרט ל 0.

b. הראו שאם $a \in R$ נילפוטנטי אזי $1-a$ הפיך. רמז: $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + \ldots)$.

5. הראו ש $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \gcd(a,b)\mathbb{Z}$ (כאשר $a \neq 0$ או $b \neq 0$).