

אלגברה לינארית תרגיל 8 תשע"ט

להגשה בשבוע שמתחיל ב 09/12

שאלה 1:

ציינו האם הקבוצות הבאות ת"ל או בת"ל, ובמקרה של ת"ל יש להציג את אחד הווקטורים כצירוף לינארי של השאר.

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ 3+8i \\ 5+7i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-i \\ 5 \\ 2+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+i \\ 3+2i \\ 4-i \end{pmatrix} \right\} \text{ מעל שדה } \mathbb{C}.$$

שאלה 2:

יהי R^3 מרחב וקטורי מעל R . עבור אילו ערכים של m וקטור v שייך לתת-מרחב הנפרש על ידי הווקטורים v_1, v_2 ? מצא את הצירוף הלינארי המבטא את v .

(א) $v_2 = (2, 1, -1), v_1 = (1, 2, 3), v = (1, m, -m)$
 (ב) $v_2 = (3, 2, 0), v_1 = (2, 1, -m), v = (m, -1, -2)$

שאלה 3:

יהי $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ מרחב וקטורי של מטריצות מגודל 2×2 מעל שדה \mathbb{R} . האם המטריצות הבאות תלויות לינארית? במידה וכן, הציגו את אחת המטריצות על ידי השתיים האחרות.

(א) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ב) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

שאלה 4:

יהיו $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ וקטורים ב \mathbb{R}^n שאינם וקטורי האפס. נניח ש- $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ תלויים לינארית וש- \vec{v}_3 אינו צרוף לינארי של \vec{v}_1, \vec{v}_2 .

הוכיחו שקיים סקלר k כך ש $\vec{v}_2 = k \vec{v}_1$.

שאלה 5:

יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ מ"ו, נתונים הפולינומים הבאים:

$$p_1(x) = 4 + x + x^2 + 5x^3, \quad p_2(x) = 11x - 5x^2 + 3x^3,$$

$$p_3(x) = 2 - 5x + 3x^2 + x^3, \quad p_4(x) = 1 + 3x - x^2 + 2x^3$$

1. בדוק האם הפולינומים תלויים לינארית מעל \mathbb{R} .
2. במידה והפולינומים תלויים לינארית רשמו כל פולינום כצירוף לינארי של שאר הפולינומים.
3. האם הפולינום p_2 שייך ל- $\text{span}\{p_1, p_4\}$.

שאלה 6:

יהיו S_1, S_2 תת קבוצות של מרחב וקטורי V .

- א. הוכיחו כי $\text{span}(\text{span}(S_1)) = \text{span}(S_1)$.
- ב. הראו שאם $S_1 \subseteq S_2$ אז $\text{Span}(S_1) \subseteq \text{Span}(S_2)$.
- ג. נניח ש S_1, S_2 קבוצות זרות כך ש $S_1 \cup S_2$ מהווה קבוצה בלתי תלויה לינארית (מעל שדה הבסיס של V). הוכיחו כי $\text{Span}(S_1 \cup S_2) = \text{Span}(S_1) \oplus \text{Span}(S_2)$.

שאלה 7:

בכל אחד מהסעיפים הבאים, בדוק האם המרחב הנפרש שווה לקבוצה המושווית אליו.
אם כן, בטאו איבר כללי של הקבוצה באמצעות הווקטורים הנתונים.
אם לא, מצאו איבר שנמצא בקבוצה ולא בנפרש:

1.

$$\mathbb{R}^3 = \text{span} \{(2,0,4), (0,1,0), (6,5,12)\}$$

2.

$$\mathbb{R}_3[x] = \text{span} \{1, x + x^2, 4x^3 + x^2, 2x\}$$

3.

$$\mathbb{R}^{2 \times 2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \right\}$$



בהצלחה!