נכתב על ידי נועם יערי

<u>התמרות לפלס</u>

עבור פונקציה f שהיא רציפה למקוטעין ובעלת גידול אקספוננציאלי, נגדיר:

$$\mathcal{L}[f](s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

מוגדר עבור $s>s_0$ מספיק גדול.

הגדרה

f נקראת בעלת גידול אקספוננציאלי אם ורק אם קיים $c>0$, $\alpha>0$ כך שלכל t מתקיים:

$$|f(t)|\le Ce^{\alpha t}$$

הערה

התמרת פורייה:

$$\hat{f}=\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-ist}dt$$

דוגמה

1. $f(t)\equiv 1$

$$\mathcal{L}[f](s)=\int_0^\infty e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}|_{t=0}^{t=\infty}=\frac{1}{s}$$

2. $f(t)=e^{\alpha t}$

$$\mathcal{L}[f](s)=\int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{(\alpha-s)t}dt=\frac{1}{s-\alpha}$$

<u>הערה:</u> באופן כללי, אם $\mathcal{L}[f](s)=F(s)$ אזי $\mathcal{L}[e^{\alpha t}f(t)]=F(s-\alpha)$

3. $f(t)=\sin wt$

$$\mathcal{L}[f](s)=\int_0^\infty \sin wt\cdot e^{-st}dt=\underbrace{-\frac{1}{s}\sin wt\, e^{-st}|_{t=0}^{t=\infty}}_{\to 0}+\frac{w}{s}\int_0^\infty \cos wt\, e^{-st}dt$$

$$=-\frac{w}{s^2}\cos wt\cdot e^{-st}|_{t=0}^{t=\infty}-\frac{w^2}{s^2}\int_0^\infty \sin wt\cdot e^{-st}dt$$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{w^2}{s^2}\right)\mathcal{L}[f](s)=\frac{w}{s^2}\Rightarrow\mathcal{L}[f]=\frac{\frac{w}{s^2}}{1+\frac{w^2}{s^2}}=\frac{w}{s^2+w^2}$$

4. $f(t)=\cos wt$

$$\mathcal{L}[f](s)=\int_0^\infty \cos wt\ \cdot e^{-st}dt=\frac{1}{s}-\frac{w}{s}\int_0^\infty \sin wt\cdot e^{-st}dt=$$
$$=\frac{1}{s}-\frac{w^2}{s^2}\mathcal{L}[f](s)\Longrightarrow \mathcal{L}[f](s)=\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{w^2}{s^2}}=\frac{s}{s^2+w^2}$$

עובדה

אם f,g רציפות למקוטעין ובעלות גידול אקספוננציאלי ומתקיים $\mathcal{L}[f]=\mathcal{L}[g]$ פרט אולי לנקודה בה אחת מהן לא רציפה.
לא נוכיח זאת בקורס (משתמשים בהתמרה ההופכית ובאנליזה מרוכבת).

התמרת לפלס של נגזרת

$$\mathcal{L}[f'](s)=\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt=f(t)e^{-st}|_{t=0}^{t=\infty}-\int_0^\infty f(t)\frac{d}{dt}(e^{-st})dt=$$
$$=f(t)e^{-st}|_{t=0}^{t=\infty}+s\cdot\mathcal{L}[f](s)=s\cdot\mathcal{L}[f](s)-f(0)$$

דוגמה

$$y'+y=0,\qquad y(0)=1$$

נפעיל את התמרת לפלס על שני האגפים (קל לראות שההתמרה לינארית מלינאריות האינטגרל):

$$sY-1+Y=0\Longrightarrow Y=\frac{1}{s+1}\Longrightarrow y(t)=e^{-t}$$

תכונות נוספות

.1

$$g(t)=e^{\alpha t}f(t)$$
$$\Longrightarrow \mathcal{L}[g](s)=\mathcal{L}[f](s-\alpha)$$

.2

$$\mathcal{L}[f'](s)=s\mathcal{L}[f](s)-f(0)$$
$$\mathcal{L}[f'']=s[\mathcal{L}[f'](s)]-f'(0)=s^2-\mathcal{L}[f]-sf(0)-f'(0)$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s)=s^n\cdot\mathcal{L}[f](s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-s\cdot f^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

.3

$$g(t)=f(\alpha t)$$
$$\Longrightarrow \mathcal{L}[g](s)=\frac{1}{\alpha}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

.4

$$g(t) = t \cdot f(t)$$
$$\Longrightarrow \mathcal{L}[g](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s)$$

דוגמה נוספת

$$f(t) = t^n$$
$$\Longrightarrow \mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt$$
$$= \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty u^n e^{-u} du = \frac{1}{s^{n+1}}\Gamma(n+1)$$

(זה כולל גם $n \notin \mathbb{N}$)