פתרון תרגיל 3 אנליזה הרמונית תש"ף

9 בדצמבר 2019

1. נפעיל גרם־שמידט על הבסיס הסטנדרטי $\{1, x, x^2\}$. נסמן את הבסיס שלנו $\{v_1, v_2, v_3\}$ ואת הבסיס החדש $\{u_1, u_2, u_3\}$.

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\|1\|}$$

נחשב את הנורמה של $p(x) = 1$:

$$\|1\|^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$$

לא משנה מה מציבים, מקבלים 1...לכן: $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1\|} = \frac{x - \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}}{\left\| x - \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \right\|} = \frac{x - \langle x, 1 \rangle \frac{1}{3}}{\left\| x - \langle x, 1 \rangle \frac{1}{3} \right\|}$$

שלפנו את הסקלר $\frac{1}{\sqrt{3}}$ לפי תכונת הליניאריות. נחשב את מכפלת הפולינומים $p(x) = x, q(x) = 1$:

$$\langle x, 1 \rangle = -1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$$

כלומר, $1, x$ הם כבר אורתוגונליים; אם כן:

$$u_2 = \frac{x}{\|x\|}$$

נחשב את הנורמה של $p(x) = x$:

$$\|x\|^2 = -1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2$$

לכן: $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} x$.

$$u_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2}{\|v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2\|} = \frac{x^2 - \left\langle x^2, 1 \right\rangle \frac{1}{3} - \left\langle x^2, x \right\rangle \frac{x}{2}}{\left\| x^2 - \langle x^2, 1 \rangle \frac{1}{3} - \langle x^2, x \rangle \frac{x}{2} \right\|}$$

כאן כבר שלפתי ישר את הסקלרים. נחשב את המכפלות:

$$\left\langle x^2,1\right\rangle = 1\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1=2$$

$$\left\langle x^2,x\right\rangle = 1\cdot(-1)+0\cdot 0+1\cdot 1=0$$

ולכן:

$$u_3=\frac{x^2-\frac{2}{3}}{\left\|x^2-\frac{2}{3}\right\|}$$

נחשב את הנורמה של $p(x)=x^2-\frac{1}{3}$:

$$\left\|x^2-\frac{2}{3}\right\|^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

לכן: $u_3=\sqrt{\frac{3}{2}}\left(x^2-\frac{2}{3}\right)$.

2. באמצעות גרם־שמידט על הבסיס $\left\{1,x,x^2\right\}$, אנחנו מקבלים את הבסיס האורתונורמלי של U:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}x,\sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\right\}$$

כפי שראינו גם בתרגול. הקירוב הטוב ביותר הוא ההיטל האורתוגונלי, כלומר:

$$\pi_U\left(e^x\right)=\left\langle e^x,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}+\left\langle e^x,\sqrt{\frac{3}{2}}x\right\rangle\sqrt{\frac{3}{2}}x+\left\langle e^x,\sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\right\rangle\sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

אם נסדר:

$$\pi_U\left(e^x\right)=\left\langle e^x,1\right\rangle\frac{1}{2}+\left\langle e^x,x\right\rangle\frac{3}{2}x+\left\langle e^x,\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\right\rangle\frac{45}{8}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

נחשב את המכפלות הפנימיות; תיאורטית צריך בשתי האחרונות אינטגרציה בחלקים, בפועל התעצלתי ואסתפק בוולפרם אלפא:

$$\left\langle e^x,1\right\rangle=\int_{-1}^{1}e^x dx=e-\frac{1}{e}$$

$$\left\langle e^x,x\right\rangle=\int_{-1}^{1}xe^x dx=\frac{2}{e}$$

$$\left\langle e^x,\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\right\rangle=\int_{-1}^{1}e^x\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx=\frac{2\left(e^2-7\right)}{3e}$$

נציב ונקבל את הדרוש.

3. נשתמש בתכונות המכפלה הפנימית.

(א)

$$\langle v-\pi_U(v),\tilde{v}_j\rangle=\left\langle v-\sum_{k=1}^{n}\langle v,\tilde{v}_k\rangle\tilde{v}_k,\tilde{v}_j\right\rangle=\langle v,\tilde{v}_j\rangle-\left\langle\sum_{k=1}^{n}\langle v,\tilde{v}_k\rangle\tilde{v}_k,\tilde{v}_j\right\rangle$$

גם הסכום יוצא החוצה, וגם הסקלרים $\langle v,\tilde{v}_k\rangle$; נקבל:

$$=\langle v,\tilde{v}_j\rangle-\sum_{k=1}^{n}\langle v,\tilde{v}_k\rangle\langle\tilde{v}_k,\tilde{v}_j\rangle$$

מכיוון שהוקטורים $\{\tilde{v}_1,\dots\tilde{v}_n\}$ אורתונורמליים, כל האיברים בסכום מתאפסים חוץ מהאיבר $\langle\tilde{v}_j,\tilde{v}_j\rangle$, ששווה ל־$1$; הוא מתקבל כאשר $k=j$. נקבל:

$$=\langle v,\tilde{v}_j\rangle-\langle v,\tilde{v}_j\rangle\cdot 1=0$$

כנדרש.

(ב) ובכן:

$$\langle\pi_U(v),w\rangle=\left\langle\sum_{k=1}^{n}\langle v,\tilde{v}_k\rangle\tilde{v}_k,w\right\rangle=\sum_{k=1}^{n}\langle v,\tilde{v}_k\rangle\langle\tilde{v}_k,w\rangle$$

לפי תכונת הליניאריות; כעת, נכניס את הסקלר $\langle\tilde{v}_k,w\rangle$ לרכיב השני ב־$\langle v,\tilde{v}_k\rangle$, ולפי תכונת ההרמיטיות:

$$\sum_{k=1}^{n}\left\langle v,\overline{\langle\tilde{v}_k,w\rangle}\tilde{v}_k\right\rangle=\left\langle v,\sum_{k=1}^{n}\langle w,\tilde{v}_k\rangle\tilde{v}_k\right\rangle=\langle v,\pi_U(w)\rangle$$

כנדרש.