תרגיל 2

1) הוכח שהטורים הבאים מתכנסים במידה שווה בתחום הנתון:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x)$ ב (-0.5,0.5)

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}$ ב $\mathbb{R}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ ב [-1,1]

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)\sqrt{n}}$ ב [-1,1]

2) א. מצא (בתחום ההתכנסות) את הפונקציה אליה מתכנס הטור $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(a+nd)$ (כאשר a ו-d קבועים), וחשב: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (3+4n)$.

ב. מצא (בתחום ההתכנסות) את הפונקציה אליה מתכנס הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, וחשב: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n(2n+1)}$.

3) מצא את סכום הטור ואת רדיוס ההתכנסות שלו: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(3x)^{n+1}}{n!}$

4) נגדיר: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$

א. מצא את רדיוס ההתכנסות של הטור.

ב. חשב $f'(\frac{1}{2})$.

5) נגדיר: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n x^{n-1}}{4^n}$

א. מצא את רדיוס ההתכנסות של הטור.

ב. חשב: $f(1)$.

6) מצא את תחום ההתכנסות ש טורי החזקות הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 2^n}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n 3^n}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} n^a (x-x_0)^n$ (a קבוע ממשי כלשהו)

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,(x-a)^n$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$

ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}(x-x_0)^n$

7) מצא את רדיוס ההתכנסות של טור החזקות: $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+m}{n} x^n$.

תזכורת: עבור $p,k \geq 0$ שלמים: $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$.

8) חשב בקירוב $\int_0^{\frac{1}{2}} x\ln(1+x^3)dx$ עם שגיאה של 10^{-2} לכל היותר.

9) הוכח כי לכל $x \in \mathbb{R}$: $\int_0^x e^{-t^2}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.