תרגול 4

תרגילי חזרה, מרחבים אינווריאנטים וז'ורדן

תרגיל:

יהי $V=P_2[\mathbb{R}]$ (ז"א מרחב הפולינומים מעל $\mathbb{R}$ ממעלה קטנה או שווה ל 2) ותהיי $T:V\to V$ המוגדרת ע"י $T(p(x))=p(x)+(x+1)p'(x)-x^2p''(x)$ כאשר $p'(x)$ היא הנגזרת הראשונה של $p(x)$ ו $p''(x)$ היא הנגזרת השנייה של $p(x)$.

א. חשבו את המטריצה $[T]$ ביחס לבסיס הסטנדרטי $\{1,x,x^2\}$.

ב. חשבו את הערכים העצמיים של T.

ג. חשבו את הפולינום המינימלי של T.

פתרון:

<u>סעיף א</u>

נמצא תחילה את המטריצה המייצגת ביחס לבסיס הסטנדרטי.

$$T(1)=1+0\cdot x+0\cdot x^2$$
$$T(x)=1+2\cdot x+0\cdot x^2$$
$$T(x^2)=0\cdot 1+2\cdot x+1\cdot x^2$$

$$\Leftarrow\quad [T]=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

<u>סעיף ב</u>

המטריצה משולשית עליונה ולכן הפולינום האופייני הוא $p_A(x)=(x-1)^2(x-2)$

הערכים העצמיים הם: $1,2$.

המשך פתרון:

<u>סעיף ג</u>

הפולינום האופייני הוא $p_A(x)=(x-1)^2(x-2)$

לכן שתי האפשרויות היחידות לפולינום המינימלי הן:

$(x-1)^2(x-2)$, $(x-1)(x-2)$.

נציב את המטריצה בפולינום $(x-1)(x-2)$ ונקבל $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\neq 0$ והפולינום

המינימלי הוא $(x-1)^2(x-2)$.

תרגיל:

תהא A מטריצה מרוכבת $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&i&i&i\\0&0&-i&-i\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

א. הוכח ש A ניתנת ללכסון.

ב. הוכח ש A דומה ל A^t.

ג. מצא מספרים מרוכבים a,b,c,d כך ש $A^{-1}=aI_4+bA+cA^2+dA^3$.

פתרון:

סעיף א

A מטריצה משולשת עליונה, לכן האיברים על האלכסון הם הערכים העצמיים.

הערכים העצמיים של A הם $\lambda_1=1,\lambda_2=i,\lambda_3=-i,\lambda_4=-1$

ל A 4 ערכים עצמיים שונים כסדר המטריצה A.

בהרצאה ראיתם שאם למטריצה מסדר n יש n ערכים עצמיים שונים אז היא לכסינה.

סעיף ב

הוכחנו בסעיף קודם כי A לכסינה, לכן קיימת P הפיכה ו D אלכסונית המקיימות $D=P^{-1}AP$.

נקבל ש $A=PDP^{-1}\Leftarrow A^t=\left(PDP^{-1}\right)^t\Leftarrow A^t=\left(P^t\right)^{-1}D^tP^t$.

נסמן $P^t=Q$, מכיוון ש D מטריצה אלכסונית $D^t=D$ ואז נקבל $A^t=Q^{-1}DQ$.

קיבלנו כי A,A^t דומות לאותה מטריצה D ומטרנזיטביות בדמיון מטריצות נקבל ש A,A^t דומות.

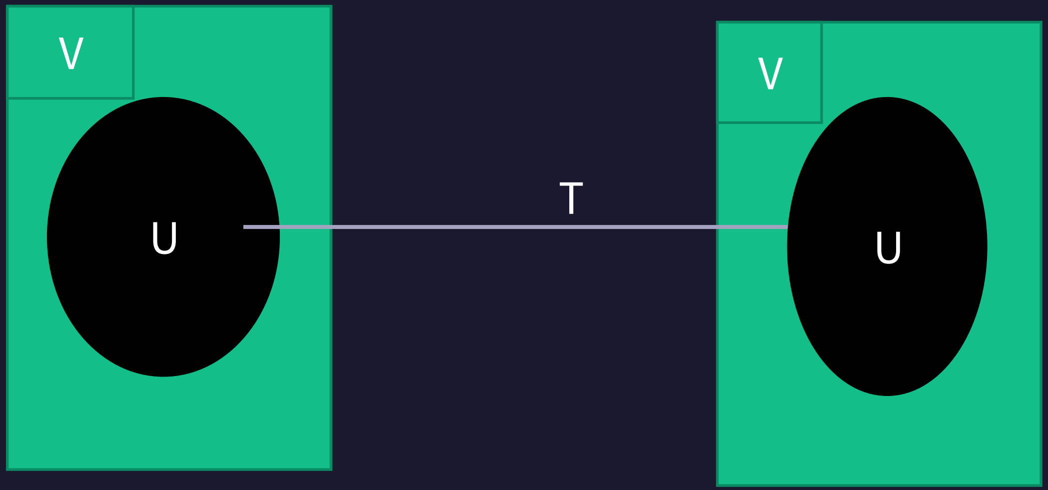
סעיף ג

ראינו כי 0 אינו ערך עצמי של A, לכן A הפיכה וקיימת A^{-1}.
מסעיף א נקבל שהפולינום האופייני של A: $p_A(x)=(x-1)(x-i)(x+i)(x+1)=x^4-1$.
לפי משפט קיילי המילטון A שורש של הפולינום האופייני של A, לכן
$A^4-I=0 \Leftarrow A^4=I \Leftarrow AA^3=I \Leftarrow A^{-1}=A^3$.
לכן $a=b=c=0, d=1$.

הגדרה

יהי $T:V\rightarrow V$ אופרטור, תת מרחב $U\subset V$ ייקרא אינווריאנטי (תחת T) אם לכל $u\in U$ מתקיים $T(u)\in U$.

במילים פשוטות: מרחב הוא אינווריאנטי ביחס לאופרטור אם האופרטור שולח כל וקטור מתת המרחב לוקטור בתת המרחב



דוגמא

יהי $T:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(x+y,y+z,0)$.

המרחב הוקטורי $U=\{(a,b,0)|a,b\in\mathbb{R}\}$ הוא אינווריאנטי (תחת T) מכיוון ש $T(a,b,0)=(a+b,b,0)\in U$.

ז'ירדון:

הגדרה: בלוק זורדן הוא מטריצה מהצורה

ערך עצמי על האלכסון
1- מעל לאלכסון

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{k \times k}$$

דוגמאות:

$$J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}, J_4(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

עובדות:

1. בלוק זורדן אינו לכסין (עבור $k > 1$). יש לו ו"ע עצמי יחיד $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ של ע"ע λ.
2. פ"א=פ"מ . למשל ל $J_k(3)$ זהו $(\lambda - 3)^k$
3. מתקיים כי $J_k(\lambda) = J_k(0) + \lambda I$

הגדרה:

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ היא בצורת זורדן אם היא מטריצת אלכסונים בלוקים כאשר כל בלוק הוא בלוק זורדן. כלומר מהצורה

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}$$

דומה

משפט: $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ צמודה למטריצה בצורת זורדן (כלומר קיימת P הפיכה כך ש $P^{-1}AP = J$, J בצורת זורדן) אמ"מ הפ"א $p_A(\lambda)$ מל"ל.
במקרה זה מתקיים במטריצה J כי

1. מספר הפעמים שע"ע λ_0 מופיע על האלכסון = ר"א של λ_0
2. מספר הבלוקים של λ_0 = ר"ג של λ_0
3. גודל הבלוק הגדול ביותר = החזקה של $(\lambda - \lambda_0)$ בפ"מ

הערה: המטריצה J נקראת צורת זורדן של A והיא יחידה עד כדי סדר בלוקים

מצאו את צורת הזורדן של A

דוגמא:

1. עבור המטריצה $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ מתקיים כי:

(א) פ"א $= p_A(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-1)^3$

(ב) פ"מ $m_A(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$

דרך הפתרון לא מוצגת ומהווה תרגיל בית

(ג) ר"ג: $\dim V_1 = 2, \dim V_{-2} = 1$

דרך הפתרון לא מוצגת ומהווה תרגיל בית. צריך למצוא בסיס לכל אחד מהמרחבים העצמיים והמימד שלהם זה הר"ג

ערך עצמי	ריבוי אלגברי	ריבוי גאומטרי	חזקה בפ"מ
1	3	2	2
-2	1	1	1
איך בא לידי ביטוי בצורת ז'ורדן?	מספר פעמים שע"ע על האלכסון	מספר הבלוקים של הע"ע	גודל הבלוק הגדול ביותר של הע"ע

דרגה 3 בפ"א

דרגה 1 בפ"א

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{1} & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

בלוק בגודל 2 שהוא הבלוק מגודל מקסימלי

השלמה לע"ע 3 של 1 על האלכסון

לפעמים אין לנו את המטריצה Aעצמה ויש לנו מידע רק על פ"א ופ"מ ואז אפשר להסיק דברים חלקיים על צורת הזורדן.

דוגמא:

2. נתון עבור מטריצה A כי:

(א) פ"א = $p_A(\lambda) = (\lambda-2)^3(\lambda-4)^4$

(ב) פ"מ $m_A(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-4)^2$

ר"ג <=ר"א
ר"ג<=1

ערך עצמי	ריבוי אלגברי	ריבוי גאומטרי	חזקה בפ"מ
2	3	$\in \{1,2,3\}$	2
4	4	$\in \{1,2,3,4,$	2
איך בא לידי ביטוי בצורת ז'ורדן?	מספר פעמים שע"ע על האלכסון	מספר הבלוקים של הע"ע	גודל הבלוק הגדול ביותר של הע"ע

צורות ז'ורדן אפשריות:

אופציה 1:

ע"ע 4

2 בלוקים מגודל 1
בוק אחד מגודל 2

2 בלוקים בגדל של אחד

גודל בלוק מקסימלי

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 4 & 1 & & \\ & & & & 4 & & \\ & & & & & 4 & \\ & & & & & & 4 \end{pmatrix}$$

אופציה 2:

ע"ע 4

2 בלוקים מגודל 2

לגבי 2 הכל אותו דבר

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 4 & 1 & & \\ & & & & 4 & & \\ & & & & & 4 & 1 \\ & & & & & & 4 \end{pmatrix}$$

תרגיל:

$A\in\mathbb{C}^{8\times 8}$ נילפוטנטית. ונתון כי $A^3\neq 0$

$\text{rank}\,A=5$

מצא את כל צורות ז'ורדן האפשריות.

פתרון:

A נילפוטנטית $\Leftarrow$ רק ע"ע 0 ולכן $P_A(x)=x^8$ פ"א

$m_A(x)=x^\alpha$ פמ"מ , $\alpha\le 8$

(*) נתון $A^3\neq 0$ ולכן $m_A(x)\neq x^3$

$m_A(x)=x^\alpha$ כאשר $4\le\alpha\le 8$

(*) נתון $\text{rank}\,A=5$ $\Leftarrow$ ר"ג של 0 הוא $8-5=3$

ר"ג של ע"ע 0 הוא מימד מרחב האפס של A+משפט הדרגה

ולכן יש לנו 3 בלוקים של 0 ולכן הצורות האפשריות:

בעמוד הבא...

ערך עצמי	ריבוי אלגברי	ריבוי גאומטרי	חזקה בפ"מ
0	8	3	בין 4 ל8
איך בא לידי ביטוי בצורת ז'ורדן?	מספר פעמים שע"ע על האלכסון	מספר הבלוקים של הע"ע	גודל הבלוק הגדול ביותר של הע"ע

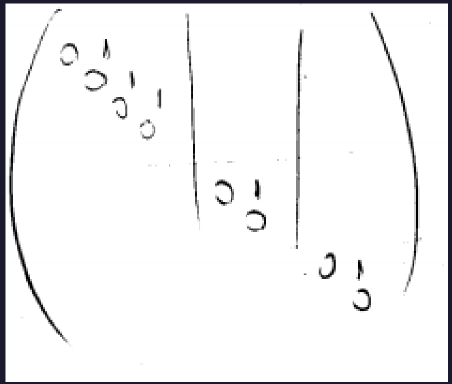
נחלק למקרים:

חזקה בפ"מ =4:

בלוק הכי גדול בגודל 4 ויש 3 בלוקים

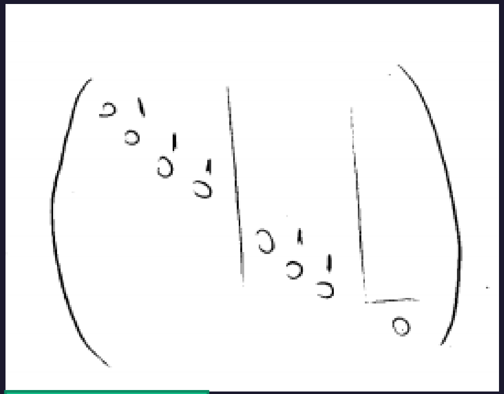
אופציה א

גדלי בלוקים:4,2,2



אופציה ב

גדלי בלוקים:4,3,1

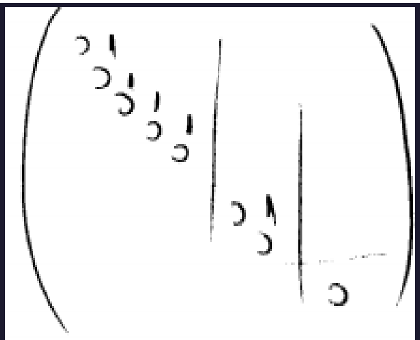


חזקה בפ"מ=5:

בלוק הכי גדול בגודל 5 ויש 3 בלוקים

אופציה יחידה

גדלי בלוקים:5,2,1



שיטת הצגה נוספת:

$$J_5(\lambda)\oplus J_2(\lambda)\oplus J_1(\lambda)$$

ע"ע שעל האלכסון

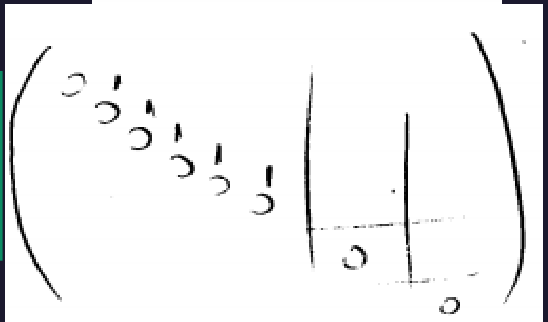
גודל הבלוק

חזקה בפ"מ=6:

בלוק הכי גדול בגודל 6 ויש 3 בלוקים

אופציה יחידה

גדלי בלוקים:6,1,1



שיטת הצגה נוספת:

$$J_6(\lambda)\oplus J_1(\lambda)\oplus J_1(\lambda)$$

נשים לב כי עבור חזקות 7 ו8 בפ"מ: לא תהיה צורת זורדן מתאימה כי אז לא יהיו לנו שלושה בלוקים.

תרגיל:

תנו דוגמא ל A, B מטריצות המקיימות כי הפ"א, פ"מ שווים ובנוסף לכל ע"ע הר"ג שווה בשני המטריצות אך הם אינם דומות:

פתרון:

$$A = J_3(0) \oplus J_2(0) \oplus J_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$m_A(x) = x^3$

$p_A(x) = x^7$

חזקה בפ"מ	ריבוי גאומטרי	ריבוי אלגברי	ערך עצמי
3	3	7	0
גודל הבלוק הגדול ביותר של הע"ע	מספר הבלוקים של הע"ע	מספר פעמים שע"ע על האלכסון	איך בא לידי ביטוי בצורת ז'ורדן?

$$B = J_3(0) \oplus J_3(0) \oplus J_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$m_A(x) = x^3$

$p_A(x) = x^7$

חזקה בפ"מ	ריבוי גאומטרי	ריבוי אלגברי	ערך עצמי
3	3	7	0
גודל הבלוק הגדול ביותר של הע"ע	מספר הבלוקים של הע"ע	מספר פעמים שע"ע על האלכסון	איך בא לידי ביטוי בצורת ז'ורדן?

אבל המטריצות לא דומות כי למטריצות דומות אותה צורת ז'ורדן.

תרגיל: . $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ הוכיחו כי A, A^t דומות.

פתרון:

שלב 1:

נתחיל עם בלוק זורדן

$$A = J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \lambda_0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

שלב 2:

$$A^t = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & & \\ 1 & \lambda_0 & & & \\ & 1 & \lambda_0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

הוא $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k$ בנוסף $rank(A - \lambda_0 I) = k - 1$ ולכן

ערך עצמי	ריבוי אלגברי	ריבוי גאומטרי	חזקה בפ"מ
λ_0	k	1	
איך בא לידי ביטוי בצורת ז'ורדן?	מספר פעמים שע"ע על האלכסון	מספר הבלוקים של הע"ע	גודל הבלוק הגדול ביותר של הע"ע

כלומר יש לנו בלוק זורדן אחד מגודל k

צורת זורדן של הטרנספואוז זהה למקורית

שלב 3:

כעת נוכיח עבור

$$A = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}$$

שלב 4:

אכן לכל i מתקיים כי $J_{k_i}(\lambda_i)$ דומה למשוחלפת שלה ולכן גם A דומה ל

לפי מה שהוכחנו בשלב 2

$$A^t = \begin{pmatrix} [J_{k_1}(\lambda_1)]^t & & & \\ & [J_{k_2}(\lambda_2)]^t & & \\ & & \ddots & \\ & & & [J_{k_t}(\lambda_t)]^t \end{pmatrix}$$

כעת עבור A כללית - $A \sim J$ ולכן $A^t \sim J^t \sim J \sim A$

דמיון מטריצות הוא יחס שקילות ובפרט טרנזיטיבי

הערה: זה נכון לכל מטריצה אבל ההוכחה מסובכת.

בהצלחה!!