תרגיל 8 טופולוגיה

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. (א) הוכיחו כי מרחב טופלוגי X הוא טריויאלי אם ורק אם יש לו בסיס בעל קבוצה אחת.

פתרון: אם המרחב X טריויאלי אז X היא הקבוצה הפתוחה הלא ריקה היחידה ולכן בוודאי ש $\mathcal{B}=\{X\}$ בסיס. מצד שני נניח ש $\mathcal{B}=\{B\}$ בסיס של X. X בעצמה קבוצה פתוחה וצריכה להיות איחוד של אברים מהבסיס ולכן בהכרח $B=X$. לכן אין עוד קבוצות פתוחות חוץ מ X וזו טופולוגיה טריויאלית.

(ב) יהי X מרחב דיסקרטי, הוכיחו כי קבוצה של קבוצות פתוחות (שזו בעצם סתם קבוצה של קבוצות) היא בסיס אם ורק אם היא מכילה את כל היחידונים (הקבוצות בגודל 1)

פתרון: יהי $\mathcal{B}$ בסיס של מרחב דיסקרטי. כל יחידון $\{x\}$ הוא קבוצה פתוחה ולכן אמור להיות איחוד של אברים מהבסיס. אבל אם B קבוצה לא ריקה המקיימת $B\subseteq\{x\}$ אז בהכרח $B=\{x\}$ ולכן כל היחידונים הם איברים בבסיס. מצד שני נניח שכל היחידונים הם אברים ב $\mathcal{B}$, אז בוודאי כל קבוצה היא איחוד של קבוצות מגודל 1 ולכן כל קבוצה היא איחוד של אברים מ $\mathcal{B}$ ולכן זה באמת בסיס.

2. יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים ו $f:X\to Y$ פונקציה. ניקח $\mathcal{B}$ להיות בסיס כלשהוא עבור Y. הוכיחו כי f רציפה אם ורק אם לכל $B\in\mathcal{B}$ $f^{-1}(B)$ היא קבוצה פתוחה.

פתרון: אם f רציפה אז מכיוון ש B פתוחה בוודאי מתקיים ש $f^{-1}(B)$ פתוחה. מצד שני, נניח כי $f^{-1}(B)$ פתוחה עבור כל $B\in\mathcal{B}$. כעת, תהי P קבוצה פתוחה כלשהיא. אז ידוע כי $P=\bigcup\limits_{i\in I}B_i$ לפי הגדרת בסיס. ולכן

$$f^{-1}(P)=f^{-1}(\bigcup_{i\in I}B_i)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i)$$

לפי הנתון כל $f^{-1}(B_i)$ הוא פתוח ולכן גם האיחוד $f^{-1}(P)$ פתוח כנדרש ו f רציפה.

3. יהיו (X,τ_X) ו (Y,τ_Y) מרחבים טופולוגיים. נסמן $\mathcal{B}=\tau_X\times\tau_Y$

(א) הראו כי $(X\times Y,\mathcal{B})$ היא לא בהכרח טופולוגיה.

פתרון: ניקח כדוגמא את $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית. ברור שהריבועים הפתוחים $(0,1)\times(0,1)$ו$(2,3)\times(2,3)$נמצאים ב $\mathcal{B}$.

אם $(X\times Y,\mathcal{B})$ באמת היה טופולוגיה אז היה מתקיים

$$(0,1)\times(0,1)\cup(2,3)\times(2,3)\in\mathcal{B}$$

אבל זה דווקא לא נכון. מפני שאם

$$(0,1)\times(0,1)\cup(2,3)\times(2,3)=A_1\times A_2$$

כאשר A_1,A_2 פתוחות ב $\mathbb{R}$ אז בהכרח יתקיים ש

$$(0,1)\cup(2,3)\subseteq A_1,A_2$$

ואז גם יתקיים

$$(0,1)\times(2,3)\subseteq A_1\times A_2$$

אבל

$$(0,1)\times(2,3)\subsetneqq(0,1)\times(0,1)\cup(2,3)\times(2,3)$$

בסתירה ולכן זו לא טופולוגיה.

(ב) הראו כי $\mathcal{B}$ הוא בסיס עבור טופולוגיה כלשהיא על $X\times Y$.
פתרון: נראה שמתקיימות הדרישות לכך שקבוצה כלשהיא היא בסיס. קודם כל בוודאי ש $X\times Y$ היא איחוד של איברים מ $\mathcal{B}$ כי $X\times Y\in\mathcal{B}$ בעצמה. כעת אם $A_1\times B_1, A_2\times B_2\in\mathcal{B}$, צריך להוכיח כי החיתוך שלהם הוא איחוד של איברים מ $\mathcal{B}$. ואכן קל לראות כי

$$A_1\times B_1\cap A_2\times B_2=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$$

כמובן ש $A_1\cap A_2$ ו $B_1\cap B_2$ הן קבוצות פתוחות (ב X וב Y בהתאמה) בתור חיתוך פתוחות ולכן $A_1\times B_1\cap A_2\times B_2$ הוא ממש איבר ב $\mathcal{B}$ בפרט זה איחוד של קבוצות מ $\mathcal{B}$. וקיבלנו מה שרצינו.

4. (א) יהי X מרחב טופולוגי B_2 (מרחב מנייה שניה). הוכיחו כי כל תת מרחב של X הוא גם מרחב B_2.
פתרון: יהי $Y\subseteq X$ תת מרחב. ראשית נשים לב ש אם $\mathcal{B}=\{B_i\}$ בסיס עבור X אז $\{B_i\cap Y\}$ הוא בסיס עבור Y. זה מפני שכל הקבוצות $B_i\cap Y$ הן אכן פתוחות ב Y. ואם P פתוחה ב Y (כלומר $P=A\cap Y$ עבור A פתוחה ב X) אז $A=\cup B_i$ ולכן $P=A\cap Y=(\cup B_i)\cap Y=\cup(B_i\cap Y)$ איחוד של אברים מהבסיס כנדרש.
כעת, אם ל X יש בסיס בן מניה $\mathcal{B}=\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ אז $\{B_i\cap Y\}_{i=1}^{\infty}$ בסיס בן מניה עבור Y ולכן Y גם כן מרחב B_2.

(ב) ראינו כי תת מרחב של מרחב ספרבילי לא חייב להיות ספרבילי. הוכיחו כי אם X מרחב טופולוגי ספרבילי ו $Y\subseteq X$ היא קבוצה פתוחה אז Y מרחב ספרבילי.
פתרון: נניח ש A היא קבוצה צפופה בת מניה ב X. וודאי ש ש $A\cap Y$ בת מניה ונראה כי היא צפופה ב Y . תהי $P\subseteq Y$ קבוצה פתוחה ב Y. היות ש $P=Y\cap P'$ עבור P' פתוחה כלשהיא ב X אז P פתוחה גם ב X. היות ש A צפופה ב X נקבל ש $A\cap P\neq\emptyset$ וזה בדיוק מה שרצינו.

5. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי B_2, הוכיחו כי $|\tau|\leq\aleph=2^{\aleph_0}$.
פתרון: יש ל X בסיס בן מניה $\mathcal{B}=\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$. כל קבוצה פתוחה P אפשר לכתוב כאיחוד של איברים מהבסיס.

$$O=\bigcup_{i\in I_P}B_i$$

כאשר $I_O\subseteq\mathbb{N}$. (כמובן, הבחירה של קבוצת האינדקסים I_O לא יחידה אבל אפשר לבחור קבוצה כלשהיא) נגדיר פונקציה

$$f:\tau\to P(\mathbb{N})$$

(כאן $P(\mathbb{N})$ זאת קבוצת החזקה) לפי

$$f(O)=I_O$$

נשים לב ש f חד חד ערכית כי אם

$$f(O_1)=f(O_2)$$

כלומר

$$I_{O_1}=I_{O_2}$$

אז

$$O_1=\bigcup_{i\in I_{O_1}}B_i=\bigcup_{i\in I_{O_2}}B_i=O_2$$

ולכן העוצמות מקיימות ש

$$|\tau|\leq|P(\mathbb{N})|=\aleph$$

כנדרש.

6. יהי X מרחב טופולוגי B_1 כך ש X היא קבוצה בת מנייה. הוכיחו כי X הוא מרחב B_2.

פתרון: יהי $\mathcal{B}$ בסיס עבור X. ניקח נקודה $x\in X$ כלשהיא. לפי הנתון, יש לה בסיס סביבות בן מניה $\{V_i^x\}_{i=1}^{\infty}$. כל V_i^x היא סביבה ולכן מכילה קבוצה פתוחה ולכן קיים $B_i^x\in\mathcal{B}$ איבר כלשהוא מהבסיס כך ש $x\in B_i^x\subseteq V_i^x$. כעת נסתכל על הקבוצה $\{B_i^x\mid i\in\mathbb{N},\,x\in X\}$. זו קבוצה בת מניה כי איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה הוא בן מניה. נרצה להוכיח שהיא בסיס. ואכן לכל U פתוחה כלשהיא ו $x\in U$ קיימת סביבה V_i^x כך ש $x\in V_i^x\subseteq U$ (הלא זה בסיס סביבות) ואז לפי מה שראינו

$$x\in B_i^x\subseteq U$$

כלומר הקבוצה $\{B_i^x\mid i\in\mathbb{N},\,x\in X\}$ אכן בסיס.

7. יהי X מרחב מטרי חסום כליל. הוכיחו כי לכל סדרה ב X יש תת סדרה שהיא סדרת קושי.

פתרון: תהי a_n סדרה. לצורך נוחות נסמן אותה $a_n=a_n^0$. לפי החסימות כליל, יש ל X כיסוי סופי של כדורים פתוחים ברדיוס 1. צריך להיות איזשהוא כדור כזה שיש בו אינסוף איברים מתוך a_n^0. נסמן את הכדור הזה $B(c_1,1)$. בגלל שיש אינסוף איברים מתוך a_n^0 בכדור הזה יש תת סדרה שנמצאת בכדור, נסמן אותה a_n^1. נגדיר $b_1=a_1^1$. (b_n הולכת להיות תת הסדרה שתהיה קושי). ל X יש גם כיסוי סופי של כדורים פתוחים ברדיוס $\frac{1}{2}$. לכן צריך להיות כדור שיש בו אינסוף איברים מתוך a_n^1. נסמן את הכדור הזה $B(c_2,\frac{1}{2})$. ניקח תת סדרה של a_n^1 שנמצאת בכדור, נסמן אותה a_n^2. נגדיר $b_2=a_1^2$. וכו' בשלב ה k תהיה לנו כבר סדרה a_n^{k-1} שנדע כבר שהיא מוכלת בכדור $B(c_{k-1},\frac{1}{k-1})$. היות שיש ל X כיסוי של כדורים פתוחים ברדיוס $\frac{1}{k}$, יש כדור, שנסמן אותו $B(c_k,\frac{1}{k})$ שבו יש אינסוף איברים מתוך a_n^{k-1} ולכן יש תת סדרה a_n^k שכולה בכדור זה. נגדיר $b_k=a_1^k$. וכך נמשיך.

נשים לב ש b_k שבנינו היא אכן תת סדרה של a_n. היות ש $b_k\in B(c_k,\frac{1}{k})$ סדרת שמוכלת בסדרת כדורים בגודל יורד ושואף ל0, קל לבדוק שהיא סדרת קושי (אכן עבור $\epsilon>0$, יש k כך ש $\frac{1}{k}<\epsilon$ ואז בוודאי ש $d(b_m,b_l)<\epsilon$ אם $m,l>k$) . וזהו.

8. תהי X קבוצה לא בת מניה עם טופולוגיה קו־מנייתית (cocountable). הוכיחו כי X אינה ספרבילית (זכרו שבתרגיל קודם הוכחתם שטופולוגיה זו גם לא B_1).
פתרון: נניח בשלילה ש X ספרבילית אז יש קבוצה בת מניה A שהיא צפופה, כלומר $\operatorname{cl} A = X$. אבל A בת מניה ולכן סגורה ולכן $\operatorname{cl} A = A$. קיבלנו $A = X$ בסתירה לכך ש X לא בת מניה.

9. (א) יהי X מרחב B_2. הראו כי לכל כיסוי כלשהוא של קבוצות פתוחות יש תת כיסוי בן מניה. (תכונה זאת נקראת תכונת לינדולף).
פתרון: יהי $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ כיסוי של קבוצות פתוחות ויהי $\mathcal{B}$ בסיס בן מניה. לכל $x \in U$, קיים $B_x \in \mathcal{B}$ כך ש $x \in B_x \subseteq U$ (לפי הגדרת בסיס). ברור ש $\{B_x\}_{x \in X}$ הינו כיסוי עבור X. למרות ש X יכולה להיות לא בת מניה, הכיסוי הזה חייב להיות בן מניה כי הוא מכיל רק אברים מ $\mathcal{B}$שהיא קבוצה בת מניה. לכן קיימת איזה קבוצה בת מניה $Y \subseteq X$ כך ש $\{B_y\}_{y \in Y}$ הוא גם כיסוי עבור X. כעת, לפי הבניה שלנו, ניתן לראות שלכל $y \in Y$ יש איזה $U \in \mathcal{U}$ כך ש $B_y \subseteq U$. יכולות להיות כמה קבוצות כאלה, אבל יש לפחות אחת. נבחר אחת מהן ונסמן אותה U_y. כעת האוסף $\{U_y\}_{y \in Y}$ שהוא תת קבוצה של $\mathcal{U}$ הוא וודאי בן מניה (מאונדקס ע"י Y שהיא קבוצה בת מניה) והוא מכסה את X כי

$$X = \bigcup_{x \in X} B_X \subseteq \bigcup_{x \in X} U_X$$

ולכן זה תת כיסוי בן מניה כנדרש.

(ב) יהי X מרחב B_2. הראו שלכל בסיס $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ יש תת קבוצה בת מניה שהיא גם בסיס. (העזרו בסעיף הקודם ובשאלה 4)
פתרון: יהי $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ בסיס בן מניה של X. היות שגם $\mathcal{B}$ בסיס. כל C_i הוא איחוד איברים מ $\mathcal{B}$. נניח שלכל $i \in \mathbb{N}$ יש קבוצת אינדקסים J_i כך ש

$$\bigcup_{j \in J_i} B_j = C_i$$

לפי שאלה 4 C_i עצמו הוא גם מרחב מניה שניה בתור תת מרחב. לכן, לפי הסעיף הקודם, לכל כיסוי יש תת כיסוי בן מניה. לכן יש קבוצת אינדקסים בת מניה

$$K_i \subseteq J_i$$

כך ש

$$\bigcup_{j \in K_i} B_j = C_i$$

נשים לב ש $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ היא קבוצה בת מניה בתור איחוד בן מניה של בנות מניה.

לכן הקבוצה $\{B_j \mid j \in \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\}$ היא גם בת מניה. אבל קבוצה זו היא גם בסיס כי כל איבר מהבסיס C_i הוא איחוד של איברים מקבוצה זו. ובזה סיימנו.