

שאלה 1:

השלם לריבוע את הביטויים הבאים:

$$x^2 + x + 1\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$2x^2 + 4x + 5 \quad (2)$$

$$7x^2 + x + 100 \quad (3)$$

שאלה 2:

בצע חלוקה של הפולינומים הבאים:

$$b(x) = x + 5, a(x) = x^3 + 9x^2 + 19x - 5 \quad (1)$$

$$b(x) = x + 5, a(x) = 3x^3 \quad (2)$$

$$b(x) = x^3 - x, a(x) = (x - 1)^3 \quad (3)$$

שאלה 3:

בצע פירוק לשברים חלקיים של הפונקציות רציונאליות הבאות:

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3} \quad (1)$$

$$\frac{x^3}{x^2 + 6x + 10} \quad (2)$$

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 + 6x + 9} \quad (3)$$

$$\frac{x}{x^2 - 5x + 6} \quad (4)$$

$$\frac{11x + 17}{2x^2 + 7x - 4} \quad (5)$$

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 5x^2 + 4} \quad (1)$$

$$\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} \quad (3)$$

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 - x - 14}{x^3 - 8} \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} \quad (5)$$

$$\int \frac{x}{x^2 - 5x + 6} dx \quad (7)$$

$$\int \frac{11x + 17}{2x^2 + 7x - 4} dx \quad (8)$$

$$\int \frac{2x^2 - 9x - 9}{x^3 - 9x} dx \quad (9)$$

$$\int \frac{3x^2 - 10}{x^2 - 4x + 4} dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2} dx \quad (11)$$

$$\int \frac{x^5 + 2x^2 + 1}{x^3 - x} dx \quad (12)$$

$$\int \frac{2x^2 + 3}{x(x-1)} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x^2 + x - 16}{(x+1)(x-3)^2} dx \quad (14)$$

$$\int \frac{2x^2 - 1}{(4x-1)(x^2+1)} dx \quad (15)$$

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} dx \quad (16)$$

שאלה 5

ראינו שכל אינטגרל של פונקציה רציונלית ניתן ע"י חילוק פולינומים ופירוק לשברים חלקיים להביא לאחד מ-4 סוגי אינטגרלים (n מספר טבעי, $b^2 - 4ac < 0$):

$$\int \frac{A}{ax+b} dx, \int \frac{A}{(ax+b)^n} dx, \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx, \int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} dx$$

ראינו איך מטפלים ב-3 הראשונים. מטרת שאלה זו להדריך אתכם להגיע לנוסחה לפתרון האינטגרל הרביעי.

א. הראו כי עבור $a > 0$, מתקיים $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

ב. כעת חשבו את האינטגרל מסעיף א' בדרך נוספת, ע"י אינטגרציה בחלקים, כאשר $u = \frac{1}{x^2+a^2}$ ו- $v' = 1$.

ג. בסעיף ב' לאחר אינטגרציה בחלקים מקבלים בצד ימין את האינטגרל $\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx$. ע"י הוספת והחסרת a^2

מהמונה, הציגו אותו ע"י סכום של אינטגרל שאתם יודעים לחשב + $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2} dx$ (כפול קבוע).

ד. כמסקנה מסעיפים א'-ג' מקבלים כי כעת יש לנו נוסחא לחישוב $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2} dx$.

ה. הכלילו את התהליך לעיל: כדי למצוא איך לחשב את $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$ מתחילים עם $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} dx$ ועושים עליו

אינטגרציה בחלקים עם $v' = 1$. כך מקבלים ביטוי עבור $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$ באמצעות $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} dx$. כלומר אם

אנחנו יודעים לפתור את האינטגרל הזה עבור n מסוים אנחנו יודעים לפתור אותו גם עבור $n+1$, וכיוון שאנחנו

יודעים לפתור את הראשון (סעיף א'), אנחנו יודעים כעת לפתור כל אינטגרל מהצורה $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$.

ו. כעת נעבור לפתרון $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} dx$. ראשית ניתן להניח כי $a = 1$ (אחרת הוציאו אותו גורם משותף ואז מחוץ לאינטגרל).

ז. כעת בצעו השלמה לריבוע במכנה ואחריה הציבו $t = x + \frac{b}{2}$.

ח. את האינטגרל שהתקבל ניתן להפריד לשני אינטגרלים, אחד מהם נפתר ע"י הצבה והשני הוא האינטגרל שפתרנו בסעיפים א'-ה'.