תרגיל 5, שאלה 6

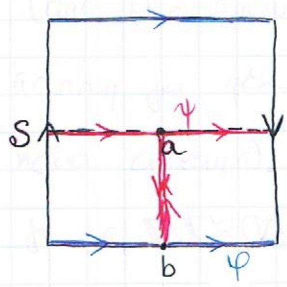
תהי M טבעת מביוס, ותהי ∂M השפה שלה. הראה ש-∂M אינו נסג של M.

הוכחה:

לפי שאלה 2 בתרגיל זה, כיון של-M יש נסג עוותי S שהוא מעגל,

$$\pi_1(M,a)\cong\pi_1(S,a)\cong\mathbb{Z}$$

כאשר a נקודה על S.



נרצה להראות שאם $i:\partial M\longrightarrow M$ העתקת ההכלה,

לא קיים הומומורפיזם $r_*:\pi_1(M,b)\longrightarrow\pi_1(\partial M,b)$ שעבורו $r_*\circ i_*=Id_{\pi_1(\partial M,b)}$.

נעיר ש-∂M מעגל, ולכן $\pi_1(\partial M,b)\cong\mathbb{Z}$.

היוצר של $\pi_1(\partial M,b)$ מסומן בכחול בשרטוט הנ"ל, נסמנו φ.

כיון ש-S נסג עוותי של M, אנו יכולים לתאר יוצר של $\pi_1(M,b)$ באמצעות מסילה γ מ-a ל-b, נסמן את היוצר ψ. הוא מתואר בשרטוט באדום.

נרצה להראות ש- $\psi^2\simeq_{\partial I}\varphi$, כאשר ψ^2 פירושו $\psi*\psi$.

קל לראות מהשרטוט שזה נכון. הסבר: פעם אחת על ψ הומוטופית "לחצי" א-φ, החצי הימני א-φ למטה והחצי השמאלי א-φ למעלה. ההליכה והחזרה מ-a ל-b ול-a הומוטופית למסילה הקבועה K_a, וה-ψ השני הומוטופי לשארית של φ.

בהנחה שזה מובן, אז נוכל להבין את i_*: הוא לוקח את היוצר של $\pi_1(\partial M,b)\cong\mathbb{Z}$ לפעמיים היוצר של $\pi_1(M,b)\cong\mathbb{Z}$, כלומר $i_*(n)=2n$.

אבל, לפי שאלה 5 בתרגיל זה, לא קיים הומומורפיזם $\Psi:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$, שעבורו $\Psi\circ i_*=Id_{\mathbb{Z}}$,

ולכן סיימנו.

תרגיל 9, שאלה 6

יהי X המרחב המתקבל משני עותקים של הטורוס $T=S^1\times S^1$ ע"י זיהוי המעגלים $S^1\times\{a\}$ משני הטורוסים זה לזה (a נקודה שנבחרה ב-S^1). מצא את $\pi_1(X)$.

פתרון:

X הוא בעצם שני טורוסים זה על זה.

נבחר U = הטורוס העליון עם קצת חפיפה, V = הטורוס התחתון עם קצת חפיפה. לכן $U\cap V$ הוא בעצם עוד עותק של מעגל (שאותו מזהים בהדבקה). הוא גם קשיר מסילתית ואינו ריק.

עד כה, $\pi_1(U)\cong\pi_1(V)\cong\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $\pi_1(U\cap V)\cong\mathbb{Z}$. אז צריך להבין את $i_*:\pi_1(U\cap V)\longrightarrow\pi_1(U)$, $j_*:\pi_1(U\cap V)\longrightarrow\pi_1(V)$.

היוצרים של $\pi_1(U)$ מתוארים בשרטוט:

אז היוצר של $\pi_1(U\cap V)$ הולך ליוצר a. באופן דומה עם V.

נחפש הצגה לפי יוצרים ויחסים, נרשום:

$$\pi_1(U)=\langle a,b\mid ab=ba\rangle\ ,\quad \pi_1(V)=\langle x,y\mid xy=yx\rangle\ ,\quad \pi_1(U\cap V)=\langle z\mid\ \rangle$$

לפי תרגיל 8, שאלה 4, מתקיים (ולפי ון-קמפן, כמובן):

$$\pi_1(X)\cong\pi_1(U)\underset{i_*\ \pi_1(U\cap V)\ j_*}{*}\pi_1(V)\cong\langle a,b,x,y\mid ab=ba,\ xy=yx,\ \underset{(a=x)}{\underbrace{ax^{-1}=1}}\rangle=$$

$$=\langle a,b,y\mid ab=ba,\ ay=ya\rangle=\langle a\mid\ \rangle\times\langle b,y\mid\ \rangle\cong F_1\times F_2$$