תרגיל 10

1 חזרה לקראת הבוחן

1. יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$ תת קבוצה. הוכיחו שאם (A,d) שלמה אז A סגורה ב־X.

<u>פתרון:</u>

במרחבים מטרים מספיק להוכיח ש־A סגורה סדרתית. אכן, נניח ש־$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ ו־$x = \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n$. צריך להוכיח ש־$x \in A$. ידוע שכל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי ולכן $\{x_n\}$ היא סדרת קושי ב־X. המטריקה ב־A שווה לזו ב־X (לפי הגדרה) ולכן $\{x_n\}$ היא סדרת קושי גם ב־(A,d). מכיוון ש־A שלמה אז הסדרה הזו בהכרח מתכנסת ל־$x' \in A$. לפי יחידות הגבול במרחב המטרי X מתקיים ש־

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n = x = x' \in A$$

כרצוי.

2. יהי $(V,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי ותהי $A \subseteq V$ קבוצה חסומה. נגדיר את הקונוס הקמור והמאוזן סביב A על ידי

$$bcone(A) := \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \le 1, \forall 1 \le i \le n : x_i \in A \Big\}$$

הוכיחו ש־$bcone(A)$ חסומה גם היא.

<u>פתרון:</u>

יהי M חסם על A, כלומר $\sup_{x\in A}\|x\| \le M$. אנחנו טוענים ש־$\sup_{x\in bcone(A)}\|x\| \le M$.
אכן, ניתן לרשום $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ עבור $x_i \in A$ ו־$\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \le 1$. לכן

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\| \le \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \|x_i\| \le M \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \le M$$

כרצוי.

3. הראו שהרכבה של פונקציות ליפשיץ היא עדיין פונקציית ליפשיץ. כלומר, אם $(X,d),(Y,\rho),(Z,\nu)$ הם מרחבים מטריים ו־$f : X \to Y$ ו־$g : Y \to Z$ הן ליפשיץ, אז גם $g \circ f : X \to Z$ היא ליפשיץ.

<u>פתרון:</u>

לפי הגדרה קיימים $M, N > 0$ כך ש־

$$\forall x_1, x_2 \in X : \rho(f(x_1), f(x_2)) \le M d(x_1, x_2)$$

$$\forall y_1, y_2 \in X : \nu(g(y_1), g(y_2)) \leq N\rho(y_1, y_2)$$

אנחנו טוענים שלכל $x_1, x_2 \in X$ מתקיים

$$\nu((g \circ f)(x_1), (g \circ f)(x_2)) \leq N \cdot Md(x_1, x_2)$$

ולכן $g \circ f$ ליפשיץ גם היא.

אכן, אם נגדיר $y_i := f(x_i)$ עבור $i \in \{1, 2\}$ נקבל ש

$$\nu((g \circ f)(x_1), (g \circ f)(x_2)) = \nu(g(y_1), g(y_2)) \leq N\rho(y_1, y_2) =$$

$$N\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq N \cdot Md(x_1, x_2)$$

4. הראו שכל תת קבוצה דיסקרטית של $\mathbb{R}$ היא לכל היותר בת מניה.

<u>פתרון:</u>

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ תת קבוצה דיסקרטית. לפי הגדרה, לכל $x \in A$ קיימת סביבה $x \in U_x \in \tau_e$ כך ש־$U \cap A = \{x\}$. לפי הגדרה, קיים $\varepsilon_x > 0$ כך ש־$B(x, \varepsilon_x) = (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subseteq U$. נשים לב שכל קטע פתוח מכיל מספר רציונלי ונבחר $r_x \in \left(x - \frac{1}{2}\varepsilon_x, x + \frac{1}{2}\varepsilon_x\right) \cap \mathbb{Q}$ לכל $x \in A$. אנחנו טוענים שהבחירה הזו היא חח"ע, כלומר שאם $x \neq y \in A$ אז $r_x \neq r_y$. אכן, נניח בשלילה ש־$r_x = r_y$. בלי הגבלת הכלליות נניח ש־$\varepsilon_x \leq \varepsilon_y$. במקרה כזה נשים לב ש־

$$r_x = r_y \in B\Big(x, \frac{1}{2}\varepsilon_x\Big) \cap B\Big(y, \frac{1}{2}\varepsilon_y\Big)$$

ולפי אי שייויון המשולש

$$|x - y| \leq |x - r_x| + |r_x - y| < \frac{1}{2}\varepsilon_x + \frac{1}{2}\varepsilon_y \leq \frac{1}{2}\varepsilon_y + \frac{1}{2}\varepsilon_y = \varepsilon_y$$

לפי הגדרה $x \in B(y, \varepsilon_y)$ אבל $x \in A$ ולכן

$$x \in B(y, \varepsilon_y) \cap A \subseteq U \cap A = \{y\}$$

מכאן ש־$y = x$ כמו שטענו.

בעצם מצאנו התאמה חח"ע בין A לבין הרציונלים ולכן A בת מניה לכל היותר.

<u>עוד פתרון:</u> ראינו כבר ש־$\mathbb{R}$ היא B_2 ולכן כל תת קבוצה שלה היא גם B_2. קבוצה דיסקרטית שהיא B_2 היא בת מניה ולכן כל תת קבוצה דיסקרטית של $\mathbb{R}$ היא בת מניה.

5. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי ו־$A, B \subseteq X$. השלימו את יחסי ההכלה בין הקבוצות הבאות אם יש כאלה, הביאו דוגמאות אם לא.

(א) $\overline{A \cap B}$ ו־$\overline{A} \cap \overline{B}$

(ב) $\overline{A \cup B}$ ו־$\overline{A} \cup \overline{B}$

(ג) $(A \cap B)^\circ$ ו־$A^\circ \cap B^\circ$

(ד) $(A\cup B)^\circ$ ו־$A^\circ \cup B^\circ$

פתרון

i. $\overline{A}\cap\overline{B} \supsetneq \overline{A\cap B}$

קל לראות אל ההכלה מימין לשמאל כי $\overline{A\cap B}$ היא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר משכילה את $A\cap B$. עם זאת $\overline{A}\cap\overline{B}$ היא בבירור סגורה וגם קל לראות שהיא מכילה את $A\cap B$. לכן, היא בהכרח מכילה גם את $\overline{A\cap B}$.
את אי ההכלה בצד השני אפשר לראות על ידי $A=(0,1), B=(1,2)$.
במקרה זה

$$\overline{A}\cap\overline{B} = \{1\} \supsetneq \emptyset = \overline{A\cap B}$$

ii. $\overline{A}\cup\overline{B} = \overline{A\cup B}$.

כדי לראות ש־$\overline{A\cup B} \supseteq \overline{A}\cup\overline{B}$ נזכר ש־$\overline{A\cup B}$ היא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר שמכילה את $A\cup B$. עם זאת, קל לראות ש־$\overline{A}\cup\overline{B}$ היא סגורה וגם מכילה את $A\cup B$ ולכן היא בהכרח מכילה את $\overline{A\cup B}$.
מנגד, קל לראות ש־$\overline{A}\subseteq\overline{A\cup B}$ לפי המונוטוניות של פעולת הסגור. באופן דומה $\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$ ולכן $\overline{A}\cup\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$ מה שמראה את ההכלה ההפוכה.

iii. $A^\circ\cap B^\circ = (A\cap B)^\circ$

אפשר לראות את זה על ידי שימוש בעובדה $(A^\circ)^c = \overline{(A^c)}$ ובסעיף הקודם.

$$(A^\circ\cap B^\circ)^c = (A^\circ)^c\cup(B^\circ)^c = \overline{(A^c)}\cup\overline{(B^c)} = \overline{(A^c\cup B^c)} =$$

$$\overline{(A\cap B)^c} = (A\cap B)^\circ$$

iv. $A^\circ\cup B^\circ \subsetneq (A\cup B)^\circ$.

גם כאן אפשר לראות את זה לפי היחס בין פנים וסגור וסעיף 1. ניתן דוגמה נפרדת לאי השיוויון: $A=[0,1]\cap\mathbb{Q}, B=[0,1]\cap\mathbb{Q}^c$ ואז

$$A^c\cup B^c = \emptyset \subsetneq (0,1) = (A\cup B)^\circ$$

6. הראו שספרביליות אינה תורשתית, כלומר מצאו מרחב טופולוגי ספרבילי עם תת מרחב שאינו ספרבילי.

פתרון:

נסתכל על המישור של סורגנפרי $X := (\mathbb{R},\tau_s)\times(\mathbb{R},\tau_s)$. כבר ראינו בתרגול ש־$(\mathbb{R},\tau_s)$ ספרבילית, וראינו בתרגיל אחר שמכפלה של מרכבים ספרבילים נשארת ספרבילית. מכאן ש־X ספרבילי. מנגד, אנחנו נטען שהאנטי־אלכסון אינו ספרבילי

$$\nabla := \{(x,-x) \mid x\in\mathbb{R}\}$$

נשים לב ש־$O := [x,x+1)\times[x,x+1)$ קבוצה פתוחה ב־X ולכן גם $\nabla\cap O$ קבוצה פתוחה ב־∇. עם זאת, קל לוודא ש־

$$\nabla\cap O = \{(x,-x)\}$$

זה נכון לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכן ∇ דיסקרטית. בנוסף, היא אינה בת מניה כי היא מוגדרת לפי התאמה ל־$\mathbb{R}$. קבוצה דיסקרטית לא יכולה להיות ספרבילית אלא אם היא בת מניה ולכן סיימנו את הטענה.

7. הוכיחו או הפריכו: חיתוך של קבוצות מושלמות הוא מושלם.
<u>פתרון:</u>

הפרכה: אפשר להסתכל על $A := [0,1], B = [1,2]$. שתי הקבוצות מושלמות אבל $A \cap B = \{1\}$ לא מושלמת.

8. הראו שכל מרחב האוסדורפי ממימד אפס הוא גם $T_{2\frac{1}{2}}$ כלומר ניתן להפרדה פונקציונלית בין נקודות.
<u>פתרון:</u>

יהיו $x \neq y \in X$. מכיוון ש־X האוסדורפי, קיימות סביבות פתוחות זרות $x \in U, y \in V$. מכיוון ש־X ממימד אפס, קיימת תת סביבה סגוחה $x \in U' \subseteq U$. נגדיר

$$f(t) := \begin{cases} 1 & x \in U' \\ 0 & x \notin U' \end{cases}$$

מכיוון ש־U' סגוחה, f רציפה. בנוסף,

$$y \in V \subseteq U^c \subseteq (U')^c$$

ולכן $f(x) \neq f(y)$ כרצוי.

9. השתמשו בפונקציות רציפות כדי להוכיח שכל קבוצה סגורה במרחב מטרי היא G_δ. הסיקו שכל קבוצה פתוחה במרחב מטרי היא F_σ.
<u>פתרון:</u>

תהי A קבוצה סגורה במרחה מטרי (X, d). נגדיר את הפונקציה $f_A : X \to \mathbb{R}$ לפי

$$f_A(x) := d(A, x) := \inf_{a \in A} d(a, x)$$

ראינו שהפונקציה הזו רציפה ולכן התמונה ההפוכה של קבוצה פתוחה היא פתוחה. מכיוון ש־A סגורה אז מתקיים ש־$d(A, x) = 0$ אם ורק אם $x \in A$. לכן

$$A = f_A^{-1}(0) = f_A^{-1}\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\Big) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f_A^{-1}\Big((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\Big)$$

נסמן $O_n := f_A^{-1}\Big((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\Big)$. אז $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ הוא חיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות כרצוי.

אם O היא קבוצה פתוחה במרחב מטרי, אז המשלים שלה הוא קבוצה סגורה. לפי מה שבדיוק ראינו, ניתן לרשום

$$O^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$$

עבור O_n פתוחות. לפי חוקי דה־מורגן מתקבל

$$O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n^c$$

שהוא איחוד של קבוצות סגורות. לפי הגדרה, O הוא F_σ.

10. מצאו דוגמה למרחב לא מטריזבילי, הוכיחו את טענתכם.
פתרון:

נסתכל על X לא בת מניה ונגדיר $\tau_{\mathsf{coc}} = \{\emptyset\} \cup \{O \mid |O^c| \le \aleph_0\}$.

כדי להראות שזו אכן טופולוגיה אפשר להשתמש בדיוק באותם טיעונים כמו במקרה של τ_{cof}, רק שמשתמשים גם באריתמטיקה של עוצמות.

כעת נראה שכל סדרה מתכנסת קבועה לבסוף. נניח ש־$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ מתכנסת ל־$x \in X$. אם $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ לא קבועה לבסוף, אז אפשר למצוא תת סדרה $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ כך ש־$x_{n_k} \neq x$ לכל $k \in \mathbb{N}$. אנחנו יודעים שאם סדרה מתכנסת אז גם כל תת קבוצה שלה (וגם לאותו גבול) אז $\lim_{k\in\mathbb{N}} x_{n_k} = x$. בנוסף, $X \setminus \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ היא סביבה פתוחה של x ולכן $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ מוכלת לבסוף ב־$X \setminus \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. זו כמובן סטירה ולכן $\{x_n\}$ קבועה לבסוף.

ראינו שבמרחב מטרי הסגור הסדרתי של קבוצה שווה לסגור שלה. אם הסדרות היחידות שמתכנסות קבועות לבסוף אז לכל $A \subseteq X$ מתקיים

$$scl(A) = cl(A) = A$$

ולכן כל קבוצה היא סגורה. מכאן שכל קבוצה היא פתוחה והטופולוגיה דיסקרטית. עם זאת, קל לראות ש־(X, τ_{coc}) אינה דיסקרטית (כי X אינה בת מניה).

11. הוכיחו או הפריכו: הסגור של קבוצה קשירה מסילתית ב־$\mathbb{R}$ הוא קשיר מסילתית.
פתרון:

הפרכה. נסתכל על תת הקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^2$ שמוגדרת ע"י

$$A := \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x} \right) \mid x \in (0,1] \right\}$$

קל לראות שהקבוצה הזו קשירה מסילתית (למעשה, היא פשוט מסילה פתוחה). מנגד, קל לראות ש־

$$\overline{A} = A \cup \{(0,t) \mid t \in [0,1]\}$$

נראה שהמרחב הזה לא קשיר מסילתית, בפרט, שאין מסילה בין $(0,1)$ ל־$(1, \sin 1)$. נניח ויש $\gamma : [0,1] \to \overline{A}$ שמחברית בין שתי הנקודות האלה. ידוע שפונקציה שרציפה על קטע סגור היא רציפה במ"ש ולכן קיים $\delta > 0$ כך שאם $|t_1 - t_2| < \delta$ אז $\|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\| < 1$. נסתכל על ההטלה על הקאורדינטה הראשונה $\pi_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. זו פונקציה רציפה ולכן $\pi_x \circ \gamma : [0,1] \to [0,1]$ גם כן פונקציה רציפה. בנוסף, $(\pi_x \circ \gamma)(0) = 0$ ו־$(\pi_x \circ \gamma)(1) = 1$. לפי משפט ערך הביניים, קיימים $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1]$ כך ש־$(\pi_x \circ \gamma)(t_n) = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi + \pi n}$. קל לראות שאם $(\pi_x \circ \gamma)(t) > 0$ אז $\gamma(t) = (t, \sin\frac{1}{t})$. מכאן, ש־$\gamma(t_n) = (t_n, (-1)^n)$. נשים לב ש־$\|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n+1})\| \ge 2$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכן $|t_n - t_{n+1}| > \delta$ לכל $n \in \mathbb{N}$. קל לראות ש־$\lim_{n\in\mathbb{N}} |t_n - t_{n+1}| = 0$ ולכן $\delta = 0$, וזו סתירה.

12. תנו דוגמה לתת מרחב של $\mathbb{R}$ שהוא קשיר אבל לא קשיר מקומית.
פתרון:

אפשר להסתכל על המשולש המקונן

$$D := \{(x,0) \mid x \in [0,1]\} \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left(x, \frac{1}{n}x \right) \mid x \in [0,1] \right\} \right) \subseteq \mathbb{R}^2$$

כלומר אוסף כל הקווים בין $(0,0)$ ל־$(1,\frac{1}{n})$. קל לראות שהוא קשיר מסילתית ולכן קשיר.

מנגד, כל סביבה של $(1,0)$ מכילה כמה קטעים שונים ולכן אינה קשירה. מכאן ש־D אינו קשר מסילתית.

2 קומפקטיות

1. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי ותהי $X \supseteq \{x_n\}$ סדרה שמתכנסת ל־$x \in X$. הוכיחו ש־$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$ היא קבוצה קומפקטית.
פתרון:

יהי $\{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{x\}$. לפי הגדרה, קיים $i_0 \in I$ כך ש־$x \in O_{i_0}$. זו סביבה של x ולכן לפי הגדרת התכנסות, יש $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שאם $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$ אז $x_n \in O_{i_0}$. לכל $n \leq n_0$ נמצא $i_n \in I$ כך ש־$x_n \in O_n$. אז $\{O_{i_n}\}_{n=0}^{n_0}$ הוא תת כיסוי פתוח של $\{O_i\}_{i\in I}$.

2. הוכיחו או הפריכו: (X,τ_{cof}) קומפקטית.
פתרון:

הוכחה. יהי $\{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של X. נניח בה"כ ש־X לא ריקה ולכן הכיסוי לא ריק. נבחר $i_0 \in I$. לפי הגדרה, $|O_{i_0}^c| < \infty$. לכל $x \in O_{i_0}^c$ נמצא $i_x \in I$ כך ש־$x \in O_{i_x}$. נסתכל על הקבוצה

$$F := \{i_x \mid x \in O_{i_0}^c\} \cup \{i_0\} \subseteq I$$

זו כמובן קבוצה סופית ובנוסף $\{O_i\}_{i\in F}$ תת כיסוי של X. קל לראות את זה משום שאם $x \in X$ וגם $x \notin O_{i_0}$ אז $x \in O_{i_x}$ לפי הבניה. מצאנו תת כיסוי סופי, כרצוי.

3. הוכיחו שמספיק לבדוק קומפקטיות לפי אברי בסיס. כלומר, אם (X,τ) מרחב טופולוגי ו־$\tau \supseteq \gamma$ בסיס ל־τ. אז X קומפקטית אם ורק אם לכל כיסוי של X עם איברים של γ יש תת כיסוי סופי.
פתרון:

ראשית, ברור שאם X קומפקטית אז לכל כיסוי של X עם איברים של γ יש תת כיסוי סופי.

מנגד, נניח שלכל כיסוי של איברים של γ יש תת כיסוי סופי ונניח ש־$\{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי כללי של X. מהתכונות של בסיס, לכל $i \in I$ קיימת $\gamma \supseteq \gamma_i$ כך ש־$O_i = \bigcup_{U\in\gamma_i} U$.
נכתוב $\gamma_i = \{U_j^{(i)}\}_{j\in J_i}$ עבור סט אינדקסים כלשהו J_i. נשים לב ש־$\{U_j^{(i)}\}_{i\in I, j\in J_i}$ הוא כיסוי של X באברי בסיס ולכן קיים לו תת כיסוי סופי. כלומר, קיימת $I \supseteq F$ סופית ו־$J_i \supseteq E_j$ סופית לכל $i \in F$ כך ש־$\{U_j^{(i)}\}_{i\in F, j\in E_j}$ כיסוי סופי של X. כלומר

$$\bigcup_{i\in F}\bigcup_{j\in E_j} U_j^{(i)} = X$$

אנחנו טוענים ש־$\{O_i\}_{i\in F}$ תת כיסוי סופי של X. ואכן

$$\bigcup_{i\in F} O_i = \bigcup_{i\in F}\bigcup_{j\in J_i} U_j^{(i)} \supseteq \bigcup_{i\in F}\bigcup_{j\in E_j} U_j^{(i)} = X$$

4. מתי הטופולוגיה הקו־מנייתית היא קומפקטית?
<u>פתרון:</u>

רק כשהיא סופית.

ברור שכשהיא סופית היא קומפקטית. בשאר המקרים, יש לה תת קבוצה בת מניה $A = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. לפי הגדרת הטופולוגיה, כל קבוצה בת מניה היא סגורה. לכן

$$A_m := \{x_n\}_{m\leq n\in\mathbb{N}}$$

היא תת סדרה יורדת של קבוצות סגורות. קל לראות ש־$\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ מקיימת FIP אבל לא IP.

5. הראו ש־$([0,1],\tau_s)$ כלומר הקטע הסגור עם טופולוגיית סורגנפריי אינו קומפקטי.
<u>פתרון:</u>

נסתכל על הקבוצה $A_n := [1-\frac{1}{n},1)$. ראינו שהקבוצה הזו סגוחה בטופולוגיה. בנוסף, קל לראות ש־$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מקיימת FIP. מנגד, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ ולכן היא לא מקיימת FIP. כלומר, $([0,1],\tau_s)$ לא קומפקטית.

6. נניח ש־(X,d) מרחב מטרי ו־$A,K\subseteq X$ כאשר K קומפקטית. הוכיחו שקיימת $x_0\in K$ כך ש־$d(K,A)=d(x_0,A)$.

(א) הוכיחו שאם A קומפקטית, אז קיים גם $a_o\in A$ כך ש־$d(K,A)=d(x_0,a_0)$.
<u>פתרון:</u>
נגדיר פונקציה $f_A : K\to\mathbb{R}$ על ידי

$$f_A(x) := d(A,x)$$

ראינו בעבר שזו פונקציה רציפה. לפי משפט וירשטראוס, היא מקבלת מינימום ב־$x_0\in K$. נשים לב ש

$$d(A,K)=\inf_{x\in K} d(A,x)=\inf_{x\in K} f_A(x)=\min_{x\in K} f_A(x)=f(x_0)=d(A,x_0)$$

כרצוי.
כדי לראות את הסעיף השני, נגדיר $f_K(a) := d(a,x_0)$ וגם עבורה יש מינימום $a_0\in A$. אז

$$d(A,K)=d(A,x_0)=\inf_{a\in A} d(a,x_0)=\inf_{a\in A} f_K(a)=\min_{a\in A} f_K(a)=f_K(a_0)=d(a_0,x_0)$$