תרגיל 9 אלגברה לינארית למורים תש"ף

24 ביוני 2020

1. הציגו את תתי המרחבים U הבאים (של מ"ו V) כאוסף פתרונות של מערכת משוואות ליניאריות הומוגנית:

(א) במרחב $V=\mathbb{R}_3[x]$ ותת המרחב $U=\operatorname{span}\left\{x^3+2,x^2+x+15\right\}$.
פתרון: ניקח פולינום כללי $a+bx+cx^2+dx^3\in\mathbb{R}_3[x]$ ונבדוק מתי הוא שייך ל U. כלומר מתי הוא צירוף לינארי של x^3+2,x^2+x+15, שזה אומר שקיימים סקלרים α_1,α_2 כך ש

$$\alpha_1\left(2+x^3\right)+\alpha_2\left(15+x+x^2\right)=a+bx+cx^2+dx^3$$

ונוכל לסדר מחדש את אגף שמאל לקבל

$$(2\alpha_1+15\alpha_2)+\alpha_2x+\alpha_2x^2+\alpha_1x^3=a+bx+cx^2+dx^3$$

שזה בעצם מערכת המשוואות

$$\begin{cases}2\alpha_1+15\alpha_2 & =a\\ \alpha_2 & =b\\ \alpha_2 & =c\\ \alpha_1 & =d\end{cases}$$

שצריך לוודא שיש לה פתרון. נדרג את המטריצה שמייצגת את מערכת המשוואות

הזאת ונבדוק זאת:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 15 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \\ 1 & 0 & d \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \\ 2 & 15 & a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 15 & a-2d \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - 15R_2]{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c-b \\ 0 & 0 & a-2d-15b \end{array}\right)$$

הגענו לכך ש: למערכת יש פתרון אמ"מ $c-b=0$ וגם $a-2d-15b=0$. ולכן

$$\text{span}\left\{x^3+2, x^2+x+15\right\} = \left\{a+bx+cx^2+dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid \begin{array}{c} c-b=0 \\ a-2d-15b=0 \end{array}\right\}$$

כנדרש בשאלה.

(ב) במרחב $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ ותת המרחב $U=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a,c,d \in \mathbb{R}\right\}$.

פתרון: נעיר כי

$$\begin{aligned} U &= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a,c,d \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : a,c,d \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

וכעת בצורה דומה לתרגיל הקודם, ניקח מטריצה כללית $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

ונבדוק מתי הוא שייך ל U. כלומר מתי הוא צירוף לינארי של $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

שזה אומר שקיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כך ש

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(שימו לב שאני מעדיף להשתמש באותיות a, b, c, d למטריצה הכללית וב α למינהן כמקדמי צירוף לינארי) ונוכל לסדר מחדש את אגף שמאל לקבל

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & -\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

שזה בעצם מערכת המשוואות

$$\begin{cases} \alpha_1 & = a \\ \alpha_2 & = b \\ \alpha_3 & = c \\ -\alpha_1 & = d \end{cases}$$

שצריך לוודא שיש לה פתרון. נדרג את המטריצה שמייצגת את מערכת המשוואות הזאת ונבדוק זאת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ -1 & 0 & 0 & d \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & d+a \end{array}\right)$$

הגענו לכך ש: למערכת יש פתרון אמ"מ $a + d = 0$. ולכן

$$U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid a + d = 0 \right\}$$

כנדרש בשאלה.

2. מצאו עבור אלו ערכים של k, m מתקיים:

$$x^3 + mx^2 + kmx + k \in \text{span}\left\{3x + 7, x^3 + 5x - 9, x^3 + 6\right\}$$

פתרון: נבדוק לאילו ערכי k,m קיימים סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כך ש

$$\alpha_1\left(7+3x\right)+\alpha_2\left(-9+5x+x^3\right)+\alpha_3\left(6+x^3\right)=k+kmx+mx^2+x^3$$

ונוכל לסדר מחדש את אגף שמאל לקבל

$$\left(7\alpha_1-9\alpha_2+6\alpha_3\right)+\left(3\alpha_1+5\alpha_2\right)x+\left(\alpha_2+\alpha_3\right)x^3=k+kmx+mx^2+x^3$$

שזה בעצם מערכת המשוואות

$$\begin{cases}7\alpha_1-9\alpha_2+6\alpha_3 & =k\\ 3\alpha_1+5\alpha_2 & =km\\ 0 & =m\\ \alpha_2+\alpha_3 & =1\end{cases}$$

שצריך לוודא שיש לה פתרון. נדרג את המטריצה שמייצגת את מערכת המשוואות הזאת ונבדוק זאת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}7 & -9 & 6 & k\\ 3 & 5 & 0 & km\\ 0 & 0 & 0 & m\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-\frac{3}{7}R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}7 & -9 & 6 & k\\ 0 & 5+\frac{27}{7} & -\frac{18}{7} & km-\frac{3}{7}k\\ 0 & 0 & 0 & m\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_4}\left(\begin{array}{ccc|c}7 & -9 & 6 & k\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & m\\ 0 & \frac{62}{7} & -\frac{18}{7} & km-\frac{3}{7}k\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_4\leftarrow R_4-\left(\frac{62}{7}\right)R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}7 & -9 & 6 & k\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & m\\ 0 & 0 & -\frac{80}{7} & km-\frac{3}{7}k\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4}\left(\begin{array}{ccc|c}7 & -9 & 6 & k\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -\frac{80}{7} & km-\frac{3}{7}k\\ 0 & 0 & 0 & m\end{array}\right)$$

הגענו לכך ש: למערכת יש פתרון אמ"מ $m=0$. ולכן

$$\left[k+kmx+mx^2+x^3\in\text{span}\left\{3x+7,x^3+5x-9,x^3+6\right\}\right]\iff m=0$$

או לכל k מתקיים כי $k+x^3\in\text{span}\left\{3x+7,x^3+5x-9,x^3+6\right\}$

3. נתבונן ב $W=\{p(x)\in\mathbb{R}_3[x]\,:\,p(1)=p'(1)\}$ תת מרחב של המרחב $V=\mathbb{R}_3[x]$.

(א) מצאו קבוצה (סופית) S שפורשת את W.

פתרון: פולינום כללי $a+bx+cx^2+dx^3\in W$ אמ"מ $a+b+c+d=b+2c+3d$ ולכן

$$W=\left\{a+bx+cx^2+dx^3\in\mathbb{R}_3[x]\,:\,a-c-2d=0\right\}$$

נפתור את המערכת

$$\left\{a-c-2d\quad=0\right.$$

ע"י הצגה כ $(1,0,-1,-2|0)$, הצבה פרמטרים במשתנים החופשיים $b=t_1,c=t_2,d=t_3$ והבעת המשתנה התלוי בעזרתם $a=t_2+2t_3$. ולכן

$$\begin{aligned}W&=\left\{(t_2+2t_3)+t_1x+t_2x^2+t_3x^3\mid t_1,t_2,t_3\in\mathbb{R}\right\}\\&=\left\{t_1x+t_2\left(1+x^2\right)+t_3\left(2+x^3\right)\mid t_1,t_2,t_3\in\mathbb{R}\right\}\\&=\text{span}\left\{x,1+x^2,2+x^3\right\}\end{aligned}$$

וקיבלנו כי $S=\left\{x,1+x^2,2+x^3\right\}$ היא קבוצה פורשת של W.

(ב) מצאו קבוצה (סופית) Aשפורשת את W וזרה לקבוצה S מהסעיף הקודם.

פתרון: ראינו כי עבור $S=\left\{x,1+x^2,2+x^3\right\}$ מתקיים $W=\text{span}S$. כעת נגדיר

$$\begin{aligned}v_1&=2x\in\text{span}S\\v_2&=2+2x^2=2\left(1+x^2\right)\in\text{span}S\\v_3&=4+2x^3=2\left(2+x^3\right)\in\text{span}S\end{aligned}$$

ולכן $\text{span}S \subseteq \text{span}\{v_1,v_2,v_3\}$ מכיוון ש

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\cdot 2x \in \text{span}\{v_1,v_2,v_3\} \\ 1+x^2 &= \frac{1}{2}\cdot\left(2+2x^2\right) \in \text{span}\{v_1,v_2,v_3\} \\ 2+x^3 &= \frac{1}{2}\cdot\left(4+2x^3\right) \in \text{span}\{v_1,v_2,v_3\} \end{aligned}$$

נקבל כי $\text{span}S \supseteq \text{span}\{v_1,v_2,v_3\}$ ולכן יש שיוויון $\text{span}\{v_1,v_2,v_3\} = \text{span}S$.
קיבלנו ש $A=\{v_1,v_2,v_3\}$ קבוצה שפורשת את W וזרה ל S. כמובן שאפשר להוסיף ש $v_4 = 2+2x+2x^2 = v_1+v_2 \in \text{span}\{v_1,v_2,v_3\}$ ולכן

$$\text{span}\{v_1,v_2,v_3\} = \text{span}\{v_1,v_2,v_3.v_4\}$$

וקיבלנו כי $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ עוד קבוצה פורשת ל W שזרה ל S.

4. יהי V מרחב וקטורי ויהיו $v_1,v_2,\ldots,v_n \in V$.
לכל $1 \le k \le n$, נסמן: $u_k = v_1+v_2+\cdots+v_k$. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $v_1,v_2,\ldots,v_n$ בת"ל אז $u_1,u_2,\ldots,u_n$ בת"ל.

פתרון: הוכחה: נניח כי $v_1,v_2,\ldots,v_n$ בת"ל ונוכיח כי $u_1,u_2,\ldots,u_n$ בת"ל. יהא

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n = 0$$

צירוף לינארי של $u_1,\ldots,u_n$ ששוה לאפס ונראה כי כל המקדמים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ שווים אפס (כלומר בהכרח שזהו הצירוף הלינארי הטרוויאלי). אכן, לפי הגדרת $u_1,\ldots,u_n$ נוכל לרשום את השיוויון לעיל מחדש ע"י

$$\alpha_1\left(v_1\right)+\alpha_2\left(v_1+v_2\right)+\cdots+\alpha_n\left(v_1+v_2+\cdots+v_n\right) = 0$$

ונקבץ לפי vים

$$\left(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\right)v_1+\left(\alpha_2+\cdots+\alpha_n\right)v_2+\cdots+\left(\alpha_n\right)v_n = 0$$

ומכיון ש $v_1,\ldots,v_n$ נקבל שהמקדמים שווים לאפס. כלומר

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n &= 0 \\ \alpha_2+\cdots+\alpha_n &= 0 \\ \vdots & \\ \alpha_n &= 0 \end{cases}$$

שקל לראות שיש רק את הפתרון $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ (אם נציג ע"י מטריצה, היא תהיה כבר בצורה מדורגת

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

ללא משתנים חופשיים ולכן יש רק פתרון אחד וזהו הפתרון הטריוואלי).

(ב) אם $u_1, u_2, \ldots, u_n$ פורשת אז $v_1, v_2, \ldots, v_n$ פורשת.

פתרון: הוכחה: נניח כי $u_1, u_2, \ldots, u_n$ פורשים את V ונוכיח כי $v_1, v_2, \ldots, v_n$ פורשים את V. יהא $v \in V$ ונוכיח כי קיימים סקלרים $\beta_1, \ldots, \beta_n$ כך ש $\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n = v$. נתון כי $u_1, \ldots, u_n$ פורשים את V ולכן קיימים סלקרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ כך ש

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = v$$

ולפי הגדרת $u_1, \ldots, u_n$ נוכל לרשום את השיוויון לעיל מחדש ע"י

$$\alpha_1 (v_1) + \alpha_2 (v_1 + v_2) + \cdots + \alpha_n (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = v$$

ונקבץ לפי vים

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) v_1 + (\alpha_2 + \cdots + \alpha_n) v_2 + \cdots + (\alpha_n) v_n = v$$

וכעת נוכל להגדיר

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \\ \beta_2 &= \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \\ &\vdots \\ \beta_n &= \alpha_n \end{aligned}$$

ולקבל כי

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) v_1 + (\alpha_2 + \cdots + \alpha_n) v_2 + \cdots + (\alpha_n) v_n = v$$

כנדרש.