פתרון מבחן מועד א' – 88-132 אינפי 1 תשע"ז – 27/02/17

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: ד"ר ארז שיינר.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+\sin(2xe^x))\cos(x)}{1-\cos(x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+\sin(2xe^x))}{\sin(2xe^x)}\right)^2\left(\frac{\sin(2xe^x)}{2xe^x}\right)^2\frac{x^2}{1-\cos(x)}4e^{2x}\cos(x)=1\cdot 1\cdot 2\cdot 4\cdot 1\cdot 1=8$$

ב. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos(x)\right)^{\frac{1}{x^2}}$

כיוון ש $\cos(x)\to 1$ מתקיים כי

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos(x)\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+2^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+2^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n\left(\frac{n^2}{2^n}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(\frac{n^2}{2^n}+1\right)^{\frac{1}{n}}=2\cdot\left(0+1\right)^0=2$$

יש להוכיח כי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$, נשתמש בכלל המנה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1$$

ולכן לפי כלל המנה, הסדרה החיובית אכן מקיימת $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

2. קבעו אם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט/בתנאי/מתבדרים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(e^n\right)}{\sqrt{n^3}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\left(e^n\right)}{\sqrt{n^3}}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

כיוון ש $\frac{3}{2}>1$ הטור הימני מתכנס, ולפי מבחן ההשוואה הראשון גם הטור השמאלי מתכנס.

לכן סה"כ **<u>הטור מתכנס בהחלט</u>**.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\arctan\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$$

כיוון ש $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x}=1$ (קל לוודא עם לופיטל), לפי היינה נובע כי $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1$.

לכן לפי מבחן ההשוואה הגבולי הטורים החיוביים חברים: $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

ולכן הטור אינו מתכנס בהחלט, נבדוק האם הוא מתכנס בתנאי, או מתבדר.

הנגזרת מקיימת $\left(\arctan(x)\right)'=\frac{1}{1+x^2}>0$ ולכן $\arctan(x)$ פונקציה עולה.

כיוון שהסדרה $\frac{1}{n}$ יורדת, נובע כי $\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$ מונוטונית יורדת.

כמו כן $\lim_{n\to\infty}\arctan\left(\frac{1}{n}\right)=\arctan(0)=0$.

לכן לפי מבחן לייבניץ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ מתכנס.

סה"כ הטור מתכנס אך אינו מתכנס בהחלט ולכן **<u>מתכנס בתנאי</u>**.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$

$$\left|(-1)^n\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)\right| = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \frac{n}{n}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} \to \frac{1}{2} \neq 0$$

ולכן הטור **<u>מתבדר</u>**.

3. תהי $a_n$ סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{a_n}$ , ונתון כי $a_1 > 1$ .

א. הוכיחו כי $a_n$ מונוטונית עולה.

ראשית נוכיח באינדוקציה כי לכל $n$ מתקיים $a_n > 1$ .

אכן $a_1 > 1$ .

יהי $n$ עבורו $a_n > 1$ , צריך להוכיח כי $a_{n+1} > 1$ .

אכן $a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{a_n} > 2 - 1 = 1$

(הקטנו את $a_n$ , זה הגדיל את השבר, וכיוון שהוא עם מינוס, סה"כ הביטוי קטן.)

כעת, לכל $n$ מתקיים כי $a_{n+1} - a_n = a_n - \frac{1}{a_n} > 1 - 1 = 0$ . (אותו משחק עם השבר השלילי.)

ב. חשבו את $\lim_{n\to\infty} a_n$.

כיוון שהסדרה מונוטונית עולה, היא מתכנסת למספר סופי או לאינסוף.

נניח בשלילה שהיא מתכנסת למספר סופי $L$, כיוון שהסדרה מונוטונית עולה, לכל $n$ מתקיים $a_n > a_1$ ולכן $L \ge a_1 > 1$.

ולכן

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(2a_n - \frac{1}{a_n}\right) = 2L - \frac{1}{L}$$

שימו לב כי הביטוי $\frac{1}{L}$ מוגדר כיוון ש $L > 1$ ולכן $L \neq 0$.

לכן $L^2 = 1$ ולכן $L = \pm 1$ בסתירה לכך ש $L > 1$.

לכן $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

4. תהי $f$ פונקציה שאינה רציפה ב $x = 0$.

א. הוכיחו/הפריכו: אם $f + g$ רציפה ב $x = 0$, אזי $g$ אינה רציפה ב $x = 0$.

**<u>הוכחה</u>**: נניח בשלילה ש $g$ רציפה ב $x = 0$, לכן $-g$ רציפה ב $x = 0$

ולכן $f = f + g - g$ רציפה ב $x = 0$ כסכום של רציפות, בסתירה לנתון.

ב. הוכיחו/הפריכו: אם $f \cdot g$ רציפה ב $x = 0$, אזי $g$ אינה רציפה ב $x = 0$.

**<u>הפרכה</u>**: נבחר את $f$ להיות פונקציה אינה רציפה כלשהי ב $x = 0$ (למשל פונקציית דיריכלה).

נבחר את $g = 0$ קבוע, ולכן כמובן רציפה ב $x = 0$.

מתקיים כי $f \cdot g = g = 0$ קבוע, גם היא רציפה ב $x = 0$.

5. תהי פונקציה $f$ גזירה בכל $\mathbb{R}$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) \geq x$.

א. הוכיחו כי לכל $a < 1$ קיימת נקודה עבורה $f'(x) > a$.

(רמז: הביטו ב $f(x) - ax$.)

נניח בשלילה שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f'(x) \leq a$.

נביט בפונקציה $h(x) = f(x) - ax$.

לפי ההנחה, $h'(x) = f'(x) - a \leq 0$.

לכן $h(x)$ מונוטונית יורדת.

כעת, $f(x) - x = f(x) - ax + ax - x = h(x) + (a-1)x$.

לפי הנתון, $a - 1 < 0$ ולכן $\lim_{x \to \infty}(a-1)x = -\infty$.

כיוון ש $h(x)$ מונוטונית יורדת, בקטע $[0, \infty)$ היא חסומה מלעיל על ידי $h(0)$.

סה"כ, מתקיים כי $\lim_{x \to \infty} f(x) - x = \lim_{x \to \infty} h(x) + (a-1)x = -\infty$, בסתירה לנתון ש $f(x) \geq x$.

ב. הוכיחו/הפריכו: קיימת נקודה עבורה $f'(x) \geq 1$

**<u>הפרכה</u>**: אם נחבר את $x$ לפונקציה חיובית מונוטונית יורדת, נקבל פונקציה שגדולה מ $x$ אך נגזרתה קטנה ממש מ1 תמיד.

למשל, $f(x) = x + e^{-x}$.

אכן לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x) > x$, ו $f'(x) = 1 - e^{-x} < 1$.