פתרון תרגיל 11 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית

1. זו הפסואודוספירה שלנו.

(א) וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\theta = R \cdot \left(-\frac{\sin\theta}{\cosh\phi}, \frac{\cos\theta}{\cosh\phi}, 0\right)$$

$$X_\phi = R \cdot \left(-\frac{\cos\theta\tanh\phi}{\cosh\phi}, -\frac{\sin\theta\tanh\phi}{\cosh\phi}, \tanh^2\phi\right)$$

נחשב את הנורמל:

$$X_\theta \times X_\phi = R^2 \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{\sin\theta}{\cosh\phi} & \frac{\cos\theta}{\cosh\phi} & 0 \\ -\frac{\cos\theta\tanh\phi}{\cosh\phi} & -\frac{\sin\theta\tanh\phi}{\cosh\phi} & \tanh^2\phi \end{vmatrix} =$$

$$= R^2 \cdot \left(\frac{\cos\theta\tanh^2\phi}{\cosh\phi}, \frac{\sin\theta\tanh^2\phi}{\cosh\phi}, \frac{\tanh\phi}{\cosh^2\phi}\right)$$

הנורמה היא:

$$\|X_\theta \times X_\phi\| = R^2\sqrt{\frac{\cos^2\theta\tanh^4\phi}{\cosh^2\phi} + \frac{\sin^2\theta\tanh^4\phi}{\cosh^2\phi} + \frac{\tanh^2\phi}{\cosh^4\phi}} =$$

$$= \frac{R^2\tanh\phi}{\cosh\phi}\sqrt{\tanh^2\phi + \frac{1}{\cosh^2\phi}} = \frac{R^2\tanh\phi}{\cosh\phi}$$

ולכן:

$$\vec{n} = \frac{X_\theta \times X_\phi}{\|X_\theta \times X_\phi\|} = \left(\cos\theta\tanh\phi, \sin\theta\tanh\phi, \frac{1}{\cosh\phi}\right)$$

נגזור את הנורמל:

$$\vec{n}_\theta = (-\sin\theta\tanh\phi, \cos\theta\tanh\phi, 0) = \frac{\sinh\phi}{R} \cdot X_\theta + 0 \cdot X_\phi$$

$$\vec{n}_\phi = \left(\frac{\cos\theta}{\cosh^2\phi}, \frac{\sin\theta}{\cosh^2\phi}, -\frac{\tanh\phi}{\cosh\phi}\right) = 0 \cdot X_\theta - \frac{1}{R\sinh\phi} \cdot X_\phi$$

לכן:

$$\left(L^i_j\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sinh\phi}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R\sinh\phi} \end{pmatrix}$$

ובסך הכל:

$$K = \det\left(L^i_j\right) = -\frac{1}{R^2}$$

(ב) וקטורי הנגזרות הם: $\left(R\cos\theta\sin\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\left(\cos\phi + \ln\left(\tan\frac{\phi}{2}\right)\right)\right)$

$$X_\theta = R\cdot(-\sin\theta\sin\phi, \cos\theta\sin\phi, 0)$$

$$X_\phi = R\cdot\left(\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, -\sin\phi + \frac{1}{\sin\phi}\right)$$

נחשב את הנורמל:

$$X_\theta \times X_\phi = R^2\cdot\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & 0 \\ \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi & \frac{\cos^2\phi}{\sin\phi} \end{vmatrix} =$$

$$= R^2\cdot\left(\cos\theta\cos^2\phi, \sin\theta\cos^2\phi, -\sin\phi\cos\phi\right)$$

הנורמה היא:

$$\|X_\theta\times X_\phi\| = R^2\sqrt{\cos^2\theta\cos^4\phi + \sin^2\theta\cos^4\phi + \sin^2\phi\cos^2\phi} = R^2\cos\phi$$

ולכן:

$$\vec{n} = \frac{X_\theta\times X_\phi}{\|X_\theta\times X_\phi\|} = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, -\sin\phi)$$

נגזור את הנורמל:

$$\vec{n}_\theta = (-\sin\theta\cos\phi, \cos\theta\cos\phi, 0) = \frac{\cot\phi}{R}\cdot X_\theta + 0\cdot X_\phi$$

$$\vec{n}_\phi = (-\cos\theta\sin\phi, -\sin\theta\sin\phi, -\cos\phi) = 0\cdot X_\theta - \frac{\tan\phi}{R}\cdot X_\phi$$

לכן:

$$\left(L^i_j\right) = \begin{pmatrix} \frac{\cot\phi}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{\tan\phi}{R} \end{pmatrix}$$

ובסך הכל:

$$K = \det\left(L^i_j\right) = -\frac{1}{R^2}$$

2. נתבונן במישור:

$$X(u,v) = (u,v,0)$$

ובגליל:

$$X(\theta,\phi) = (\cos\theta, \sin\theta, \phi)$$

אנו יודעים שהמטריקות של שני המשטחים זהות:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן התכונות הפנימיות זהות.
מצד שני, אנו יודעים שהעקמומיות הממוצעת של המישור היא $H = 0$.
וקטורי הנגזרות של הגליל הם:

$$X_\theta = (-\sin\theta, \cos\phi, 0)\,, X_\phi = (0,0,1)$$

הנורמל הוא

$$X_\theta \times X_\phi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

הנורמה היא 1, ולכן: $\vec{n} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$. נגזור:

$$\vec{n}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) = 1 \cdot X_\theta + 0 \cdot X_\phi$$

$$\vec{n}_\phi = (0,0,0) = 0 \cdot X_\theta + 0 \cdot X_\phi$$

כלומר:

$$(L^i_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$H = \frac{1}{2} tr\left(L^i_j\right) = \frac{1}{2}$$

ואם כן העקמומיות H אכן שונה בכל אחד מהמשטחים, ולכן זו אינה תכונה פנימית.