תרגיל 6 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ז

1. חשבו את התבניות היסודיות של המשטחים הבאים:

   (א) משטח הנתון בצורה הסתומה $z = f(x,y)$.

   (ב) $X(\theta,\phi) = (\phi\cos\theta, \phi\sin\theta, k\phi)$.

   (ג) $X(u,v) = (u\cos v, u\sin v, kv)$.

   (ד) $X(\theta,\phi) = (\cosh\phi\cos\theta, \cosh\phi\sin\theta, \phi)$.

   (ה) $X(\theta,\phi) = (2\sin\phi\cos\theta, 2\sin\phi\sin\theta, 2\cos\phi)$.

   (ו) $X(\theta,\phi) = (\cosh\phi\cos\theta, \cosh\phi\sin\theta, \sinh\phi)$.

2. השתמשו במטריצות סיבוב כדי להוכיח את הזהויות הטריגונומטריות:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

3. תהי $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ עקומה פשוטה ורגולרית. נגדיר את **הגליל מעל** α באופן הבא:

$$\Phi(a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$\Phi(s,u) = \left(\alpha^1(s), \alpha^2(s), u\right)$$

כאשר $\alpha = \left(\alpha^1, \alpha^2\right)$. הראו כי קיימות קואורדינטות על הגליל (פרמטריזציה של α), עבורן $(g_{ij}) = I$.

4. ספירת היחידה מוגדרת על ידי הפרמטריזציה הבאה:

$$X(\theta,\phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$$

כאשר $U = [0,2\pi] \times [0,\pi] \ni (\theta,\phi)$. נתבונן בעקומה $\alpha : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to U$ המוגדרת על ידי: $\alpha(t) = (\pi, 2t)$.

   (א) מצאו את אורך העקומה α.

   (ב) מצאו את אורך העקומה $X \circ \alpha$.

   (ג) הספירה לסמי התחצפה, ולא התחפפה, וסומו ישב עליה עד שיצאה טורוס, המוגדר על ידי הפרמטריזציה:

$$X(\theta,\phi) = ((2+\cos\phi)\cos\theta, (2+\cos\phi)\sin\theta, \sin\phi)$$

   חשבו את השטחים $X(D), X(E)$, כאשר $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$, $E = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,\pi]$.